QED 5–10

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

Bind 1 og 2

GeoGebra-øvelser i funksjonslære

Av *Peer Sverre Andersen*

CAPPELEN DAMM
AKADEMISK

Innhold

INNLEDNING

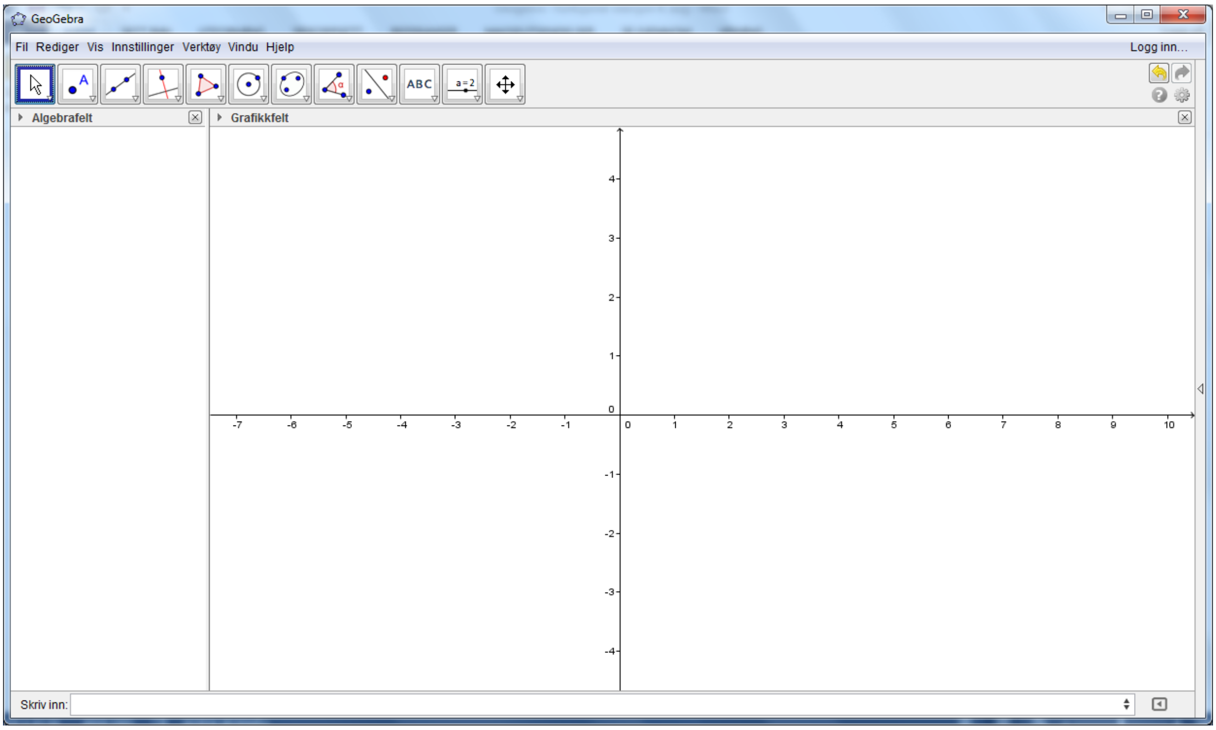
Dette heftet inneholder GeoGebra-øvelser som er rettet mot arbeidet i funksjonslære. Først er det en innledning der en del av de mest sentrale funksjonene og kommandoene i GeoGebra blir gjennomgått. Deretter følger det 10 øvelser. Øvelsene dekker tema både innen matematikk 1 og 2. Øvelse 1, 2, 3 og 6 er øvelser som i første rekke støtter opp under fagstoffet som blir tatt opp i matematikk 1. Øvelse 4, 5, 7, 8, 9 er øvelser som er rettet mot fagstoffet som blir tatt opp i matematikk 2. Øvelse 10 er en øvelse der vi ser på CAS-verktøyet. Her er det elementer som passer inn både i forhold til matematikk 1 og 2.

Øvelsene er bygget opp likt gjennom heftet. Det er lagt vekt på grundige forklaringer med bruk av mange skjermbilder. Vi håper heftet vil gi leseren innsikt i hvordan GeoGebra kan brukes i arbeidet med funksjonslære.

KORT INNFØRING I GEOGEBRA

GeoGebra er et dynamisk matematikkprogram med mange anvendelser. Du kan laste det ned gratis på siden www.GeoGebra.org. GeoGebra har først og fremst sin styrke innenfor geometri og funksjonslære. I tillegg har det også innebygget en CAS-modul (*computer algebra system*) og en regnearksmodul. Skal en ta for seg alle mulighetene som ligger i GeoGebra, ville det blitt en nokså omfangsrik bok. I dette heftet vil vi ta for oss hvordan GeoGebra kan anvendes i funksjonslæren. Vi vil til slutt se litt på CAS-modulen da det er ting her som er direkte knyttet mot funksjonslæren.

Når du åpner GeoGebra, får du opp et vindu som vist under.

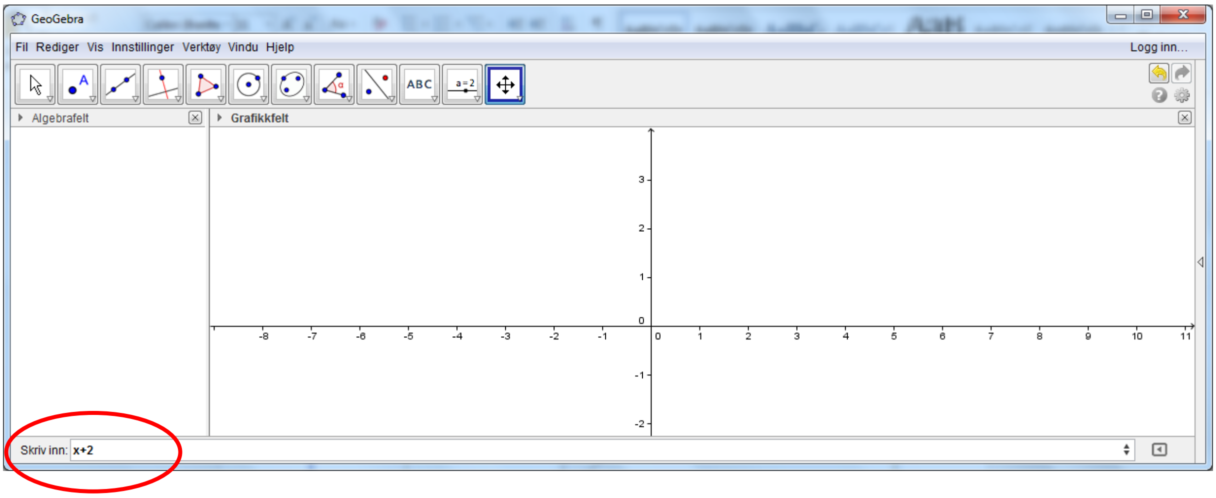


Skjermbildet består av to felt, et som kalles Algebrafelt og et som kalles Grafikkfelt. Ved å trykke på Vis i menyen kan en også få fram CAS-feltet og regnearkfeltet. En kan også få fram et ekstra grafikkfelt. I øvelsene skal vi se på, skal vi bruke GeoGebra slik det er vist over, med unntak av den ene øvelsen der vi også skal se på CAS.

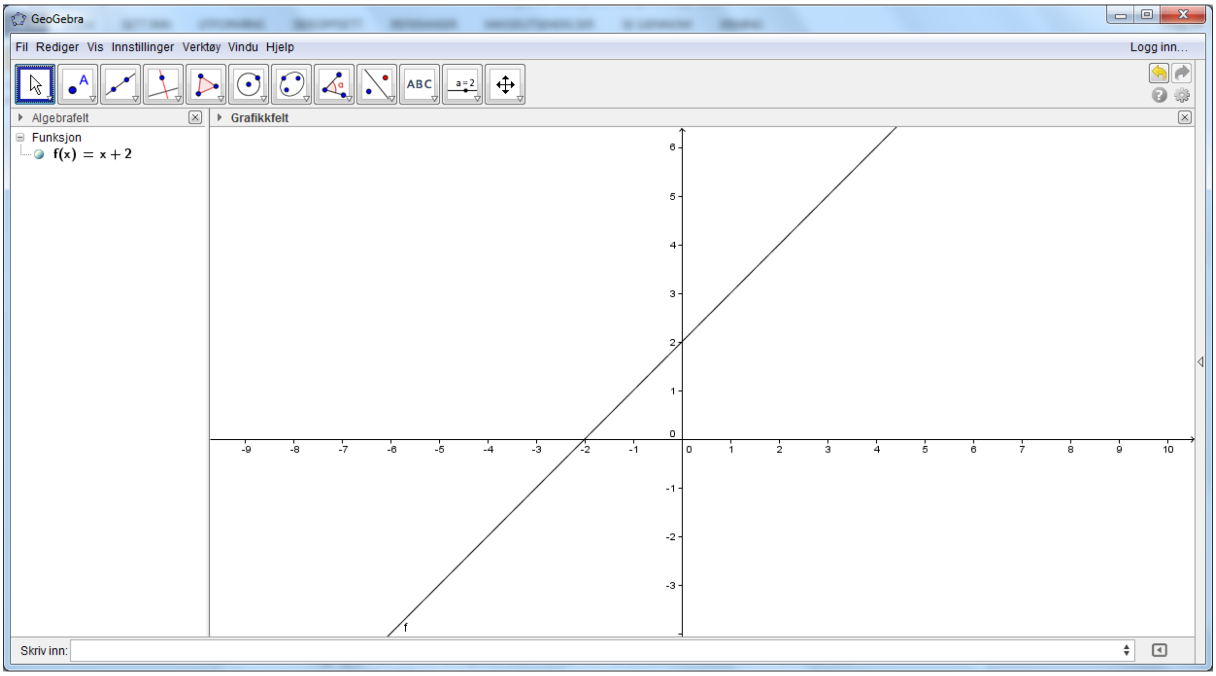
Vi skal nå starte med å se på hvordan GeoGebra fungerer. Det er en del grunnleggende begreper og prinsipper som vi må kunne for å få et godt utbytte av GeoGebra. La oss starte med et eksempel. Vi ønsker å tegne grafen til funksjonen

$$f(x) = x + 2$$

For å få det til skriver vi inn $x + 2$ i det vi kaller inntastingsfeltet. Inntastingsfeltet er det feltet som står etter Skriv inn nederst på skjermbildet. Trykk på Enter når du har skrevet inn uttrykket. Se skjermbilde på neste side.



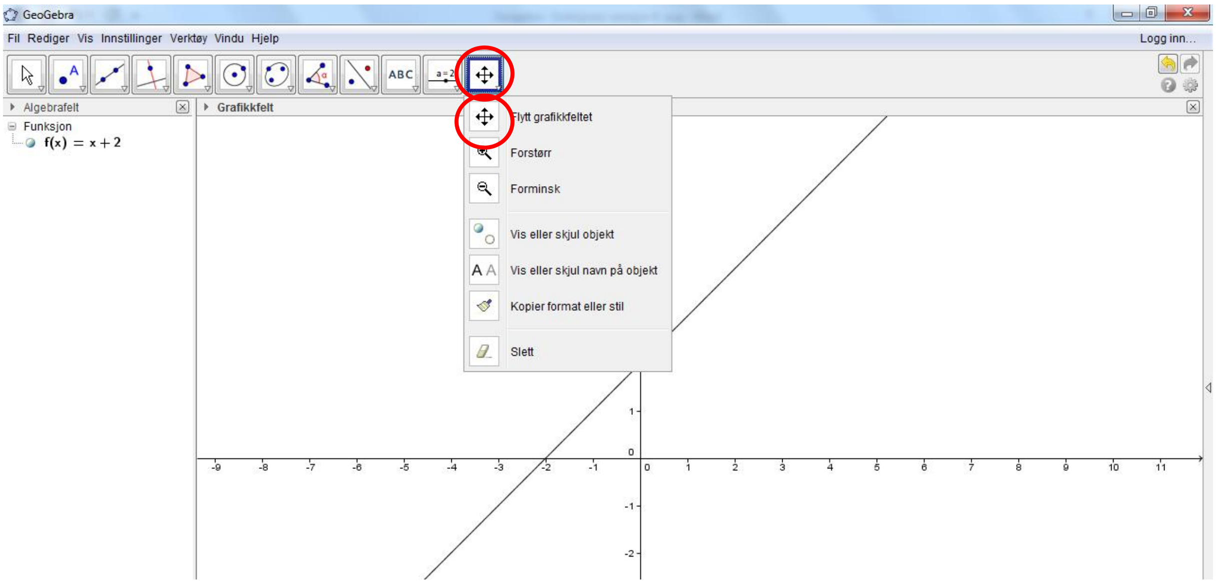
Når du har gjort det, skal du få opp en graf som vist under.



Du vil se at GeoGebra har tegnet opp grafen, og også skrevet opp funksjonen i algebrafeltet. Med utgangspunkt i denne funksjonen skal vi se på noen av de kommandoene vi kommer til å anvende i GeoGebra.

<u>Flytting av koordinatsystemet</u>

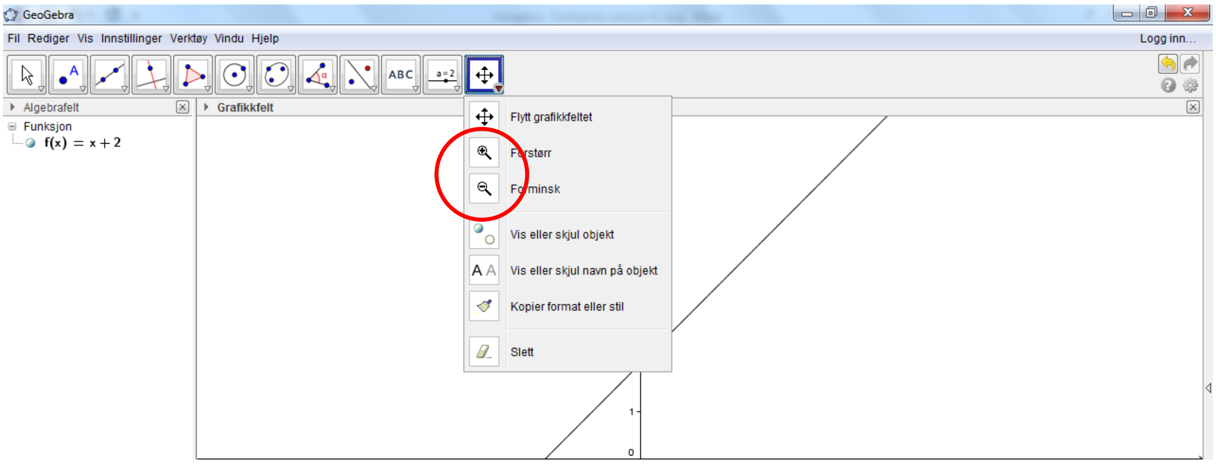
Ofte har vi behov for å flytte på koordinatsystemet. Det kan vi lett gjøre. Klikk nederst i høyre hjørne på ruten som er ringet rundt i menyen. Velg deretter det øverste alternativet i menyen som dukker opp.



Holder du venstre musetast nede mens du står i grafikkfeltet, kan du flytte koordinatsystemet rundt.

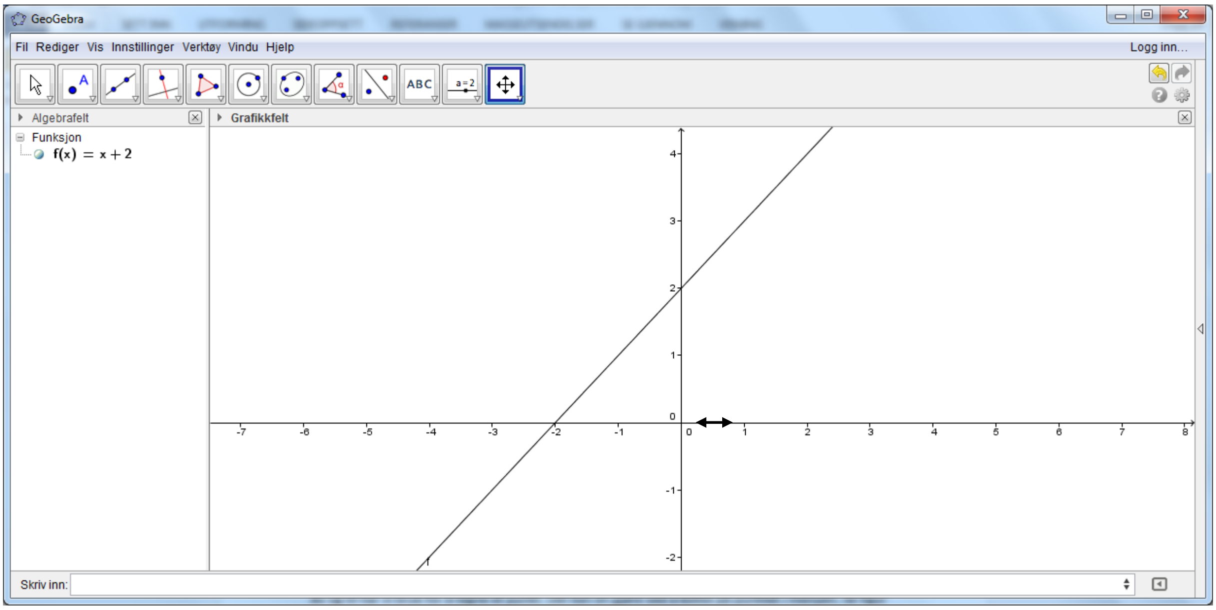
Forstørring og forminskning av grafikkfeltet

Dette kan gjøres svært enkelt ved ganske enkelt å rulle hjulet på musen. Ruller du hjulet fra deg, forstørrer du, ruller du mot deg, forminsker du. Et annet alternativ hvis en f.eks. bruker bærbar PC med touchpad, er å klikke nederst i høyre hjørne på det feltet som er ringet inn i forrige skjermbilde. Du kan deretter velge Forstørr eller Forminsk.



Skalering av akser

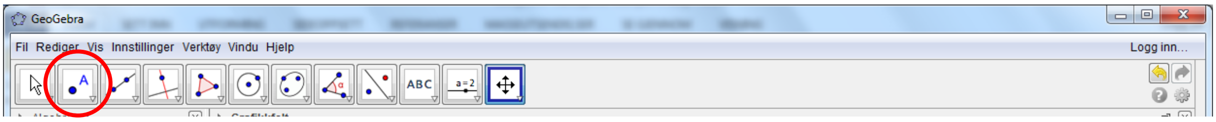
Ofte har en behov for å skalere aksene. Dette lar seg selvsagt gjøre i GeoGebra. Pass på at du først har klikket på det krysset i menyen som vi brukte når vi skulle flytte koordinatsystemet. Deretter flytter du musen enten til x-aksen eller y-aksen avhengig av hva du skal skalere. Pass på at du er akkurat på linja. Du skal da få fram et bilde som vist på neste side. Musepekeren skal gå over fra å være en hånd til å bli en pil.



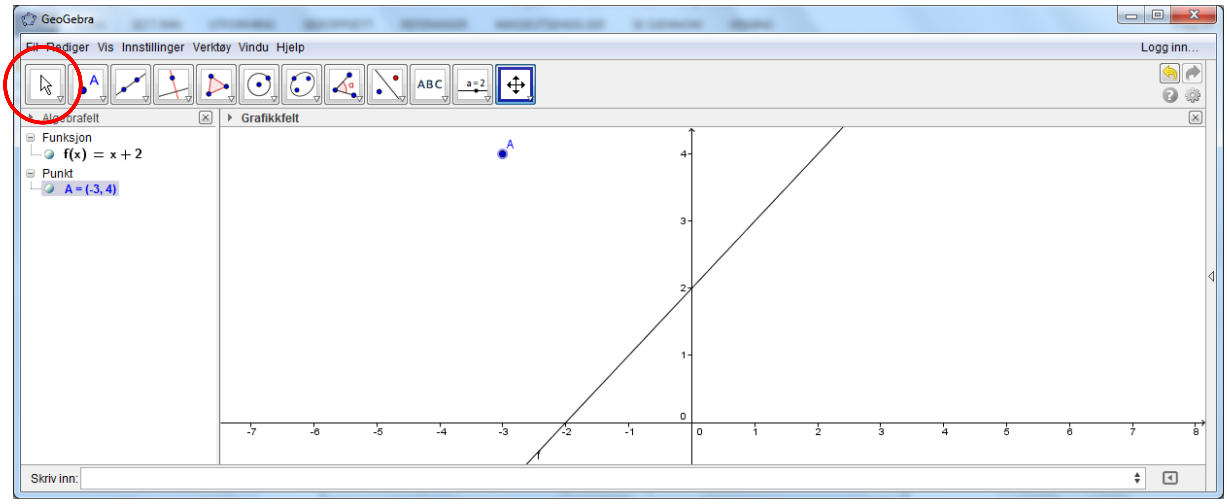
Hold venstre musetast nede når du har fått fram pilen. Ved å flytte musen mot høyre, vil du forstørre skalaen, og ved å flytte den til venstre, forminsker du skalaen.

<u>Tegne punkt</u>

Av og til har vi bruk for å tegne et punkt. Det kan en gjøre ved å klikke på punktknappen i menyen. Se figur under.



Deretter klikker du med venstre musetast i grafikkfeltet der hvor du ønsker å plassere punktet. Koordinatene til punktet vil framkomme i algebrafeltet. Hos meg har punktet blitt plassert med koordinatene $(-3,4)$. Om du har plassert punktet en annen plass, er ikke det noe problem. Vi kan flytte punktet rundt i koordinatsystemet. Det gjør du ved å klikke på knappen med pil på helt til venstre.



Klikker du med venstre musetast på punktet, vil du se at du kan flytte punktet rundt. Koordinatene til punktet vises hele tiden i algebrafeltet. Samme teknikk brukes også hvis det er andre objekter som skal flyttes. Du kan f.eks. prøve å flytte musetasten til grafen og flytte den. Hva skjer da?

Skrive inn funksjoner

I eksempelet vi har brukt, så vi på en lineær funksjon. Den kunne vi skrive direkte inn i inntastingsfeltet. Vi skal her se litt på hvordan vi kan skrive inn andre typer funksjoner.

Det første vi må være oppmerksomme på, er desimaltall, der skal en skille heltallsdelen og desimaldelen med et punktum og ikke komma. Funksjonen $f(x) = 1{,}5x$ må skrives inn som 1.5x i inntastingsfeltet.

Av og til har vi behov for å skrive inn funksjoner som denne:

$f(x) = \sqrt{2x + 3}$

Når en skal skrive inn kvadratrot, må en bruke kommandoen Sqrt. Funksjonen over skrives inn som

Sqrt(2x+3)

En annen funksjon som en av og til har bruk for, er eksponentialfunksjonen. Det vil si funksjoner av typen

$f(x) = e^{x-3}$

Denne skriver en inn ved å bruke kommandoen Exp. Funksjonen over skrives inn som

Exp(x-3)

De trigonometriske funksjonene skrives inn slik vi ellers skriver dem. Skal vi tegne opp f.eks.

$f(x) = \sin x$

så skriver du bare inn

sinx

Helt tilsvarende gjør du for de andre trigonometriske funksjonene.

ØVELSE 1. TEGNE GRAFER

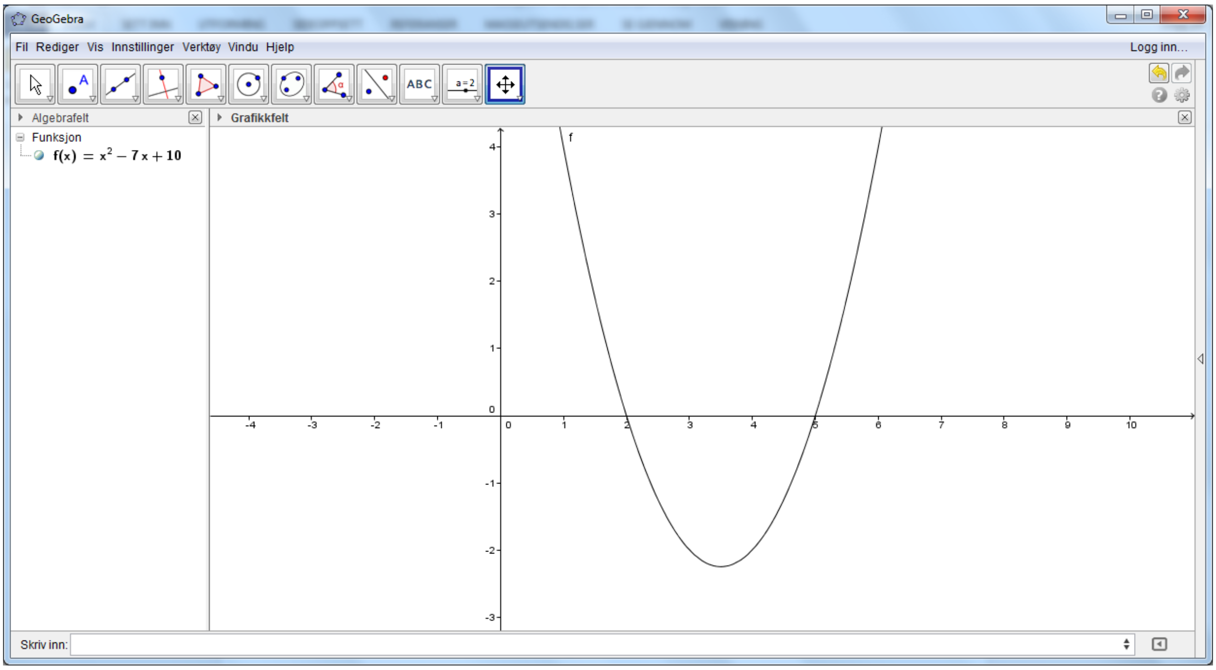
Vi skal i denne øvelsen se på hvordan vi kan bruke GeoGebra til å tegne grafer. Vi skal starte med å tegne opp grafen til funksjonen

$f(x) = x^2 - 7x + 10$

Etter at du har åpnet GeoGebra, skriver du inn funksjonsuttrykket i inntastingsfeltet. Du må skrive funksjonsuttrykket på formen

x^2-7x+10

Legg merke til at vi bruker ^ når vi skal opphøye i en potens. GeoGebra vil nå tegne opp grafen til funksjonen vår. I algebrafeltet kommer selve funksjonsuttrykket opp.



Det er en rekke ting en kan gjøre i GeoGebra. Vi skal her se på hvordan vi finner nullpunktene til grafen, og hvordan vi kan finne topp-/bunnpunkt til grafen.

Når du skal finne nullpunktene, kan du i inntastingsfeltet skrive nullpunkt. Du vil få opp flere alternativer. Velg det første der det står

Nullpunkt[<Polynom>]

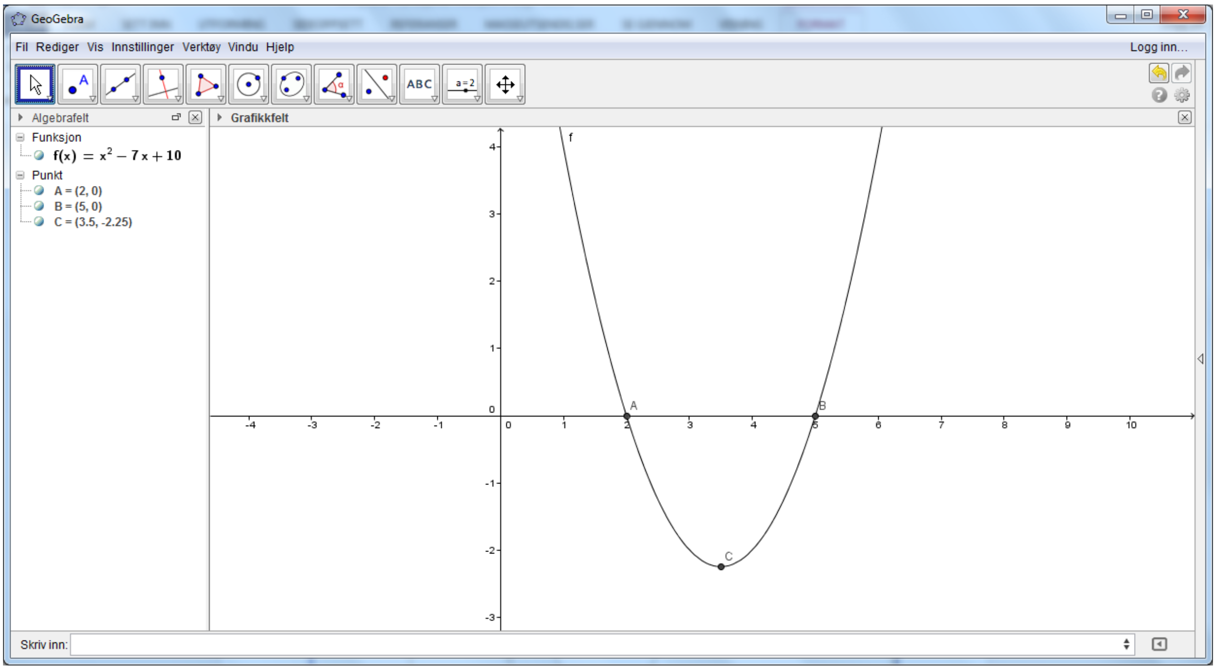
Skriv inn f istedenfor <Polynom>.

Når du skal finne ekstremalpunktene, skriver du inn ekstremalpunkt og velger alternativet

Ekstremalpunkt[<Polynom>]

Også her skriver du inn f istedenfor <Polynom>.

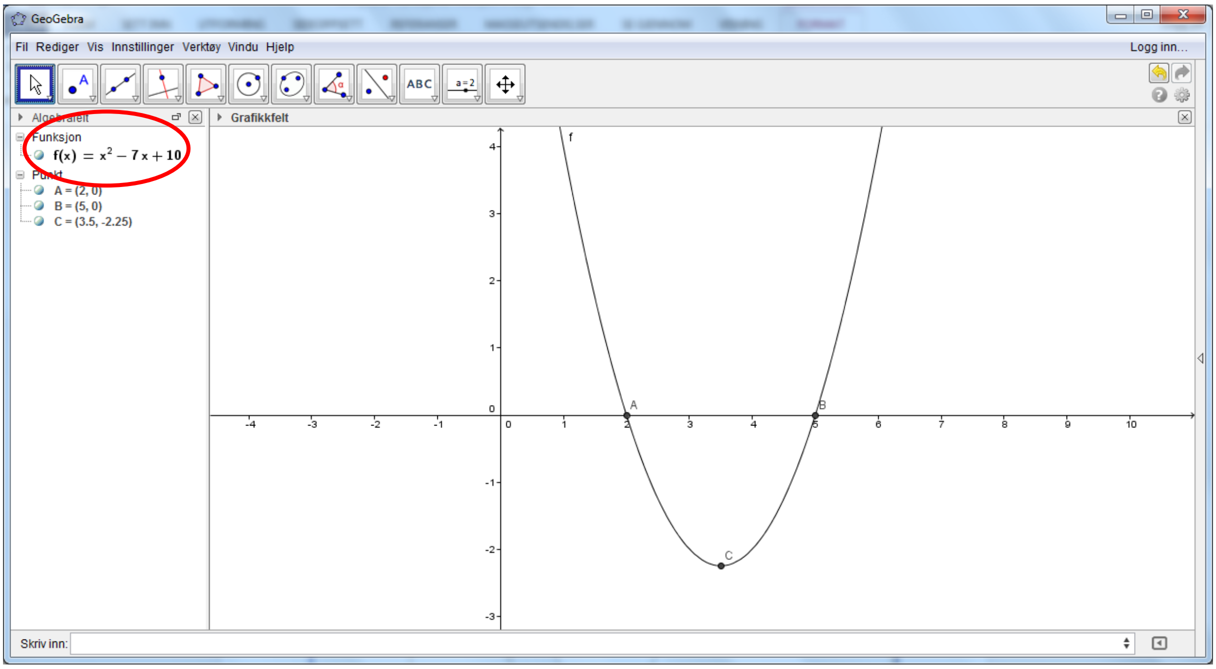
Du får nå opp følgende vindu:



Her ser du at nullpunktene er lokalisert, og de er også angitt i algebrafeltet. Det samme er ekstremalpunktet.

<u>Endring av funksjonen</u>

Vi kan endre på funksjonen vår dersom vi ønsker det. Hvis du dobbeltklikker på selve funksjonsuttrykket, har du mulighet til å endre funksjonen.



Prøv å endre den til f.eks. $f(x) = -x^2 + 3x + 8$. Hva skjer da? Vil nullpunkt og ekstremalverdi endre seg? Prøv å endre den til $f(x) = x^2 + 3x + 6$. Hva skjer med nullpunktene i dette tilfelle?

ØVELSE 2. TEGNE GRAFER TIL RASJONALE FUNKSJONER

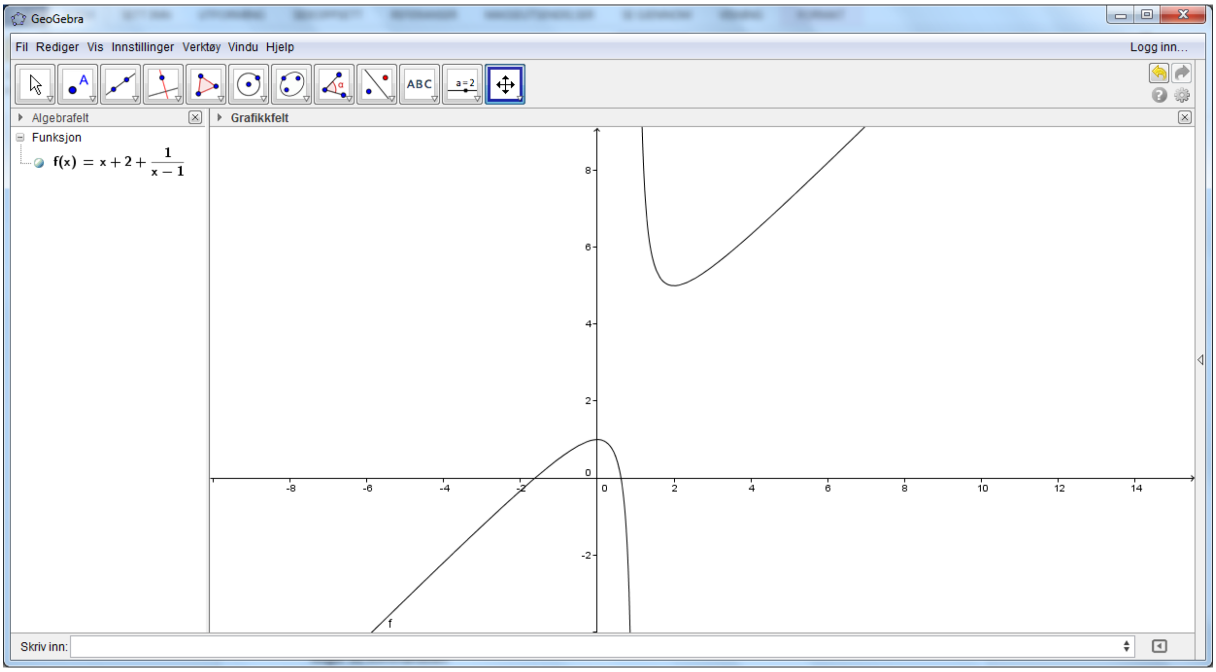
Vi så i forrige øvelse hvordan vi kan tegne grafer til andregradsfunksjoner. I denne øvelsen skal vi se på hvordan vi kan tegne grafer til rasjonale funksjoner (brøkfunksjoner). Vi skal her se hvordan vi kan jobbe med funksjoner som er på denne formen:

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$$

Du åpner en nytt GeoGebra-vindu og skriver inn en funksjon i inntastingsfeltet. Funksjonen skriver du inn på følgende form:

x+2+1/(x-1)

Husk parentes rundt det som står i nevneren, ellers blir det feil. Når du har gjort dette, får du opp grafen til funksjonen.



Du ser også at funksjonen kommer opp i algebrafeltet. Det er alltid lurt å se på funksjonen i algebrafeltet for å sjekke at den er skrevet riktig inn.

Du kan finne nullpunkter og ekstremalpunktene til denne grafen også. For å finne nullpunktene velger du kommandoen

NullpunktIntervall[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]

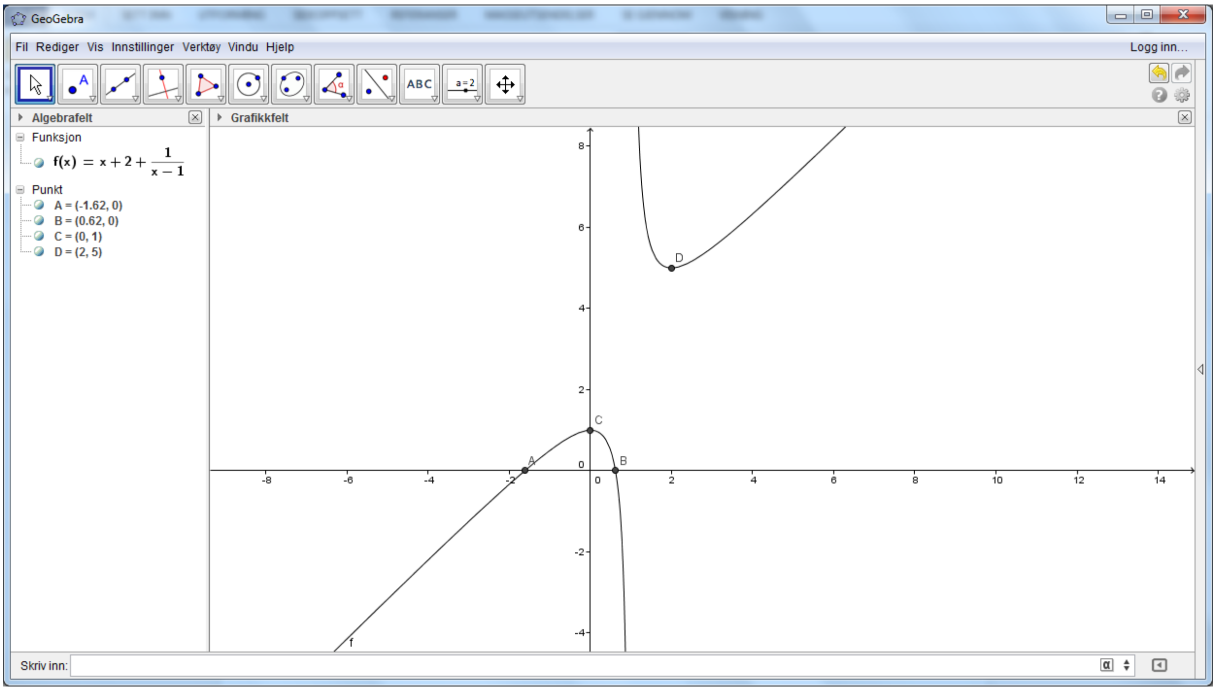
Denne kommer opp når du begynner å skrive inn null. Denne funksjonen skiller seg litt fra den vi brukte i forrige øvelse. Her må vi oppgi funksjonen vår samt et startpunkt og sluttpunkt for hvor vi skal lete etter nullpunkter. Der hvor det står <Funksjon>, skriver du inn f. Istedenfor <Start> kan du sette inn -10 og istedenfor <Slutt> setter du 10. Da er vi sikret å få med nullpunktene.

Vi ser at nullpunktene er listet i algebrafeltet samt at de er merket av i grafen.

Ekstremalpunktene finner du ved å bruke funksjonen

Ekstremalpunkt[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]

Du fyller den inn på samme måte som du gjorde for nullpunktene. Når vi har funnet både nullpunkt og ekstremalpunkt, skal du ha fått opp et skjermbilde omtrent som vist under.



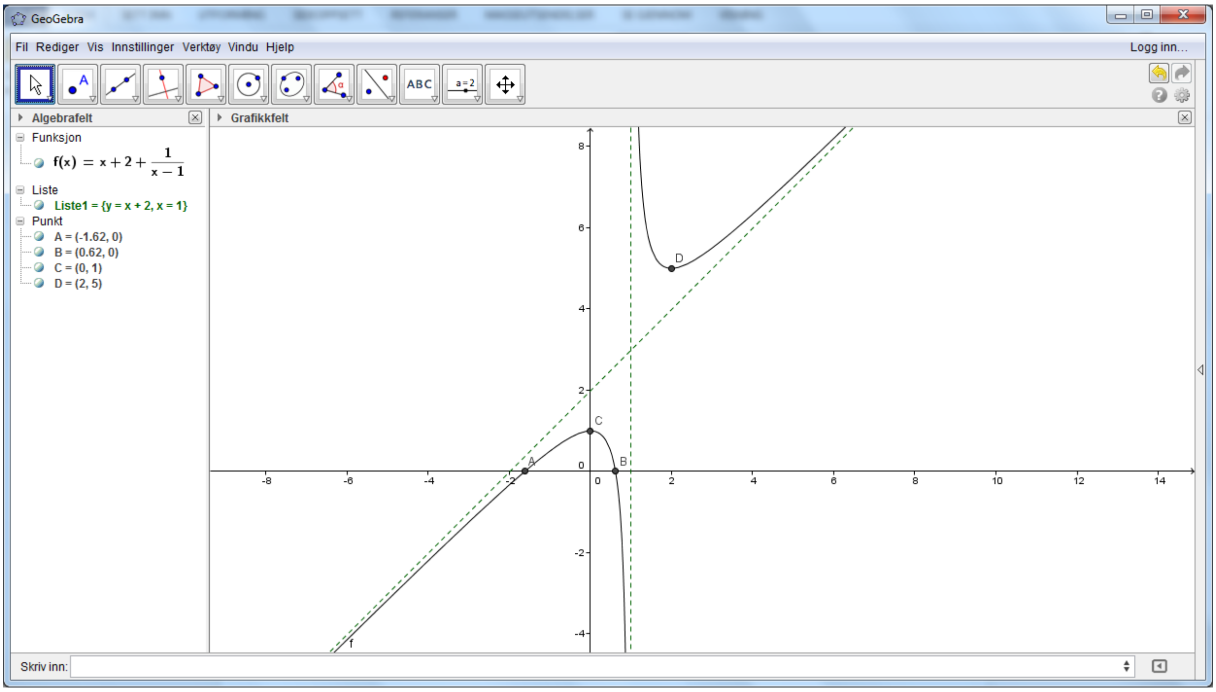
<u>Asymptoter</u>

Brøkfunksjoner vil alltid ha minst en asymptote. Disse kan vi enkelt finne i GeoGebra. Hvis du skriver inn asymptote i inntastingsfeltet, får du opp noen alternativer. Velg

Asymptote[<Funksjon>]

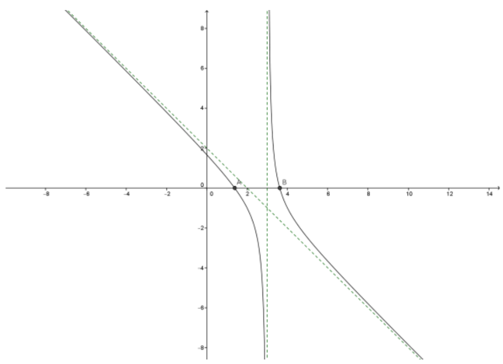
og erstatt <Funksjon> med f. GeoGebra vil nå tegne opp asymptotene. Vær oppmerksom på at dette tar noen sekunder (5–10 sek), og det kan se ut som om maskinen står og henger mens den jobber. Asymptotene blir nå tegnet inn sammen med grafen, samtidig som også likningen til dem blir oppgitt i algebrafeltet.

I dette eksempelet har vi funnet asymptotene $y = x + 2$ og $x = 1$. Disse finner du der hvor det står Liste1 i algebrafeltet.



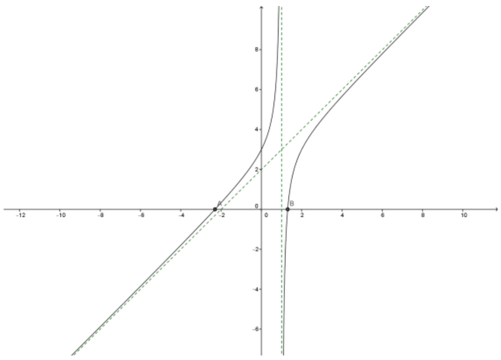
Dersom du endrer på funksjonen, vil både nullpunkt, ekstremalpunkt og asymptoter også forandres. Prøv å endre funksjonen litt. Du kan f.eks. etter tur prøve med funksjoner som er oppgitt til venstre i tabellene under, og se om du får fram grafene slik de er tegnet til høyre. Også her bare dobbeltklikker du på funksjonsuttrykket og endrer det du ønsker å endre. Studer spesielt hvordan funksjonen endrer seg når du endrer fortegnene på funksjonen.

<u>Funksjon 1</u>

$f(x) = -x + 1 + \dfrac{1}{x-3}$	

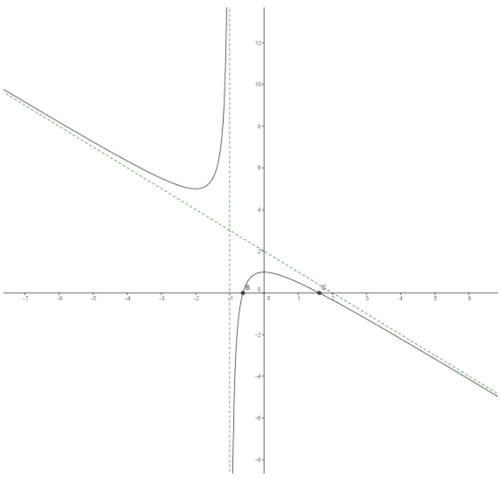
Funksjon 2

$$f(x) = x + 2 - \frac{1}{x-1}$$



Funksjon 3

$$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$$



ØVELSE 3. LIKNINGSLØSNING

I denne øvelsen skal vi se nærmere på hvordan vi kan bruke GeoGebra til å løse likninger. En oppgave en gjerne kan finne i lærebøker, er denne:

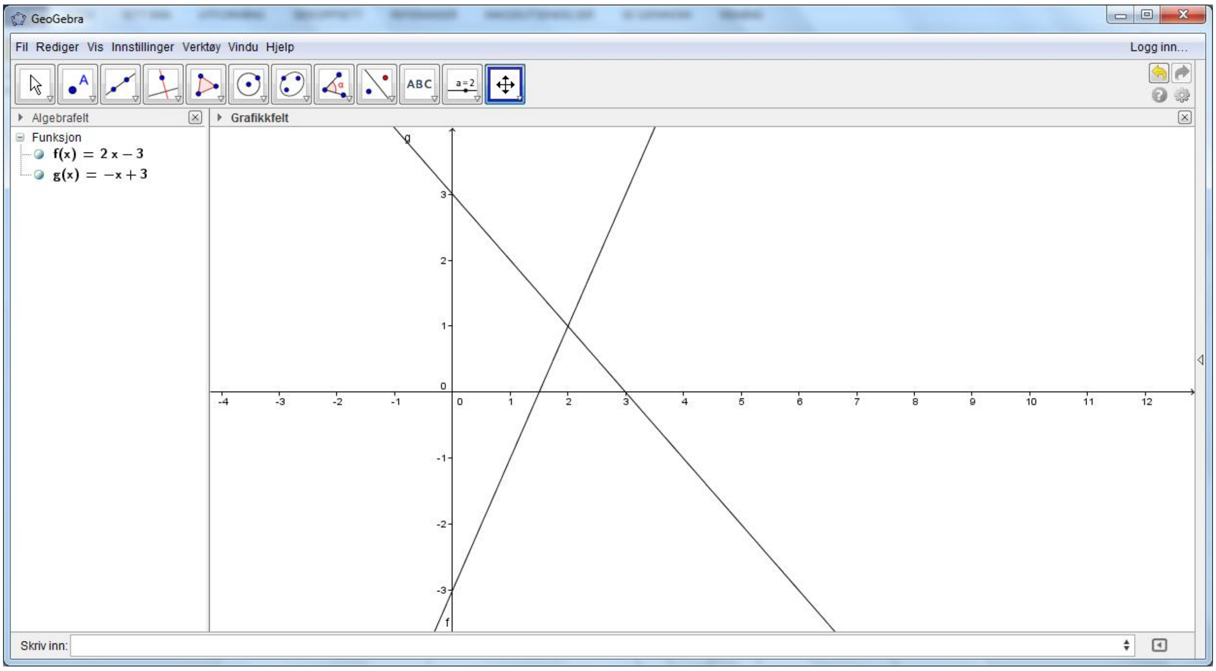
Tegn grafene til funksjonene

$f(x) = 2x - 3$ og $(x) = -x + 3$

Bruk grafene til å løse likningen

$2x - 3 = -x + 3$

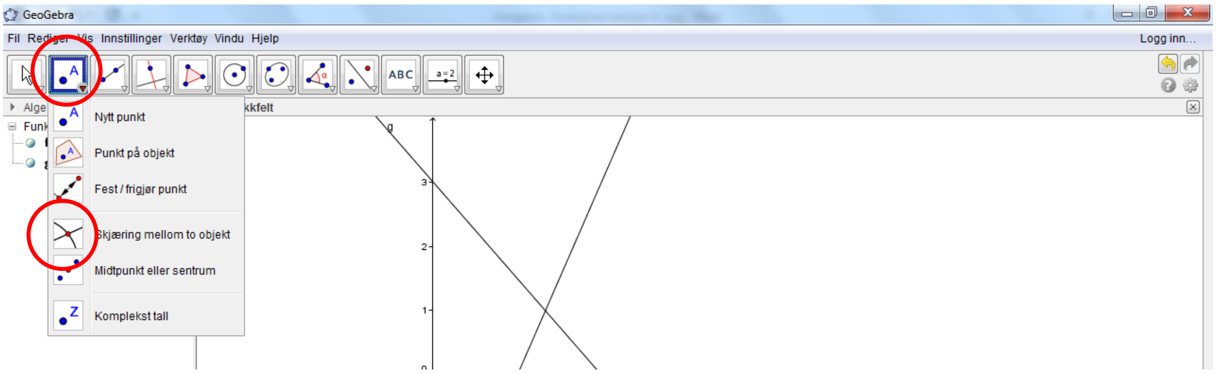
Dette er en type oppgave som er velegnet til å løse i GeoGebra. Du kan starte med å tegne opp begge grafene.



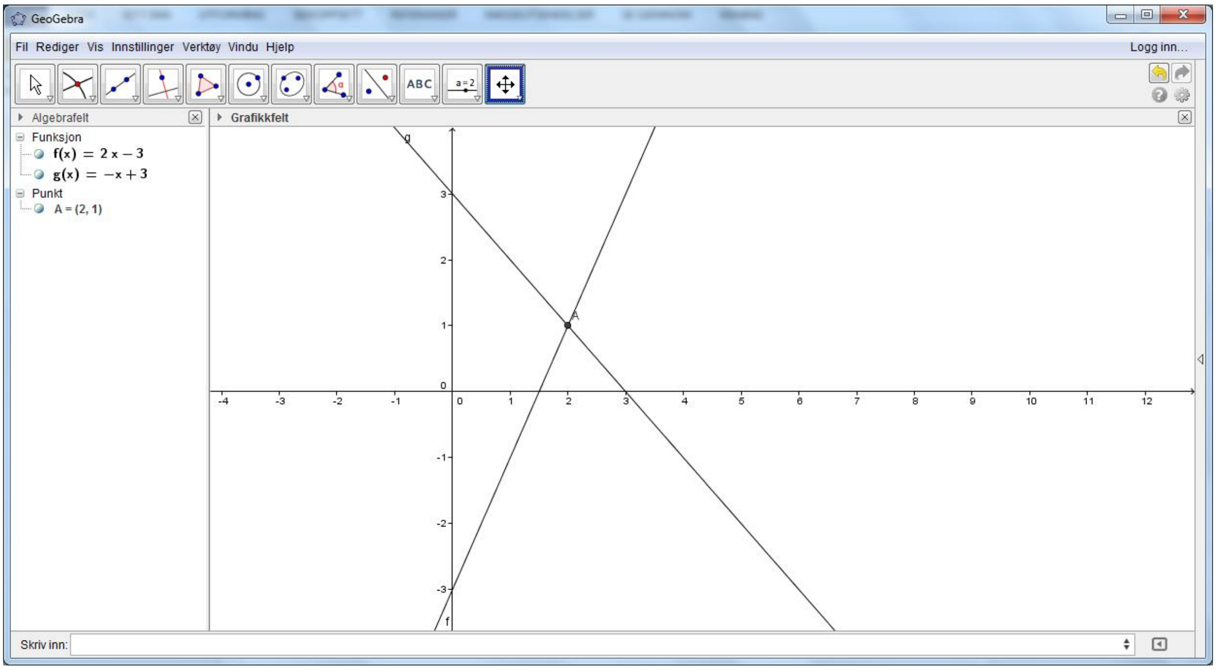
Det neste vi skal gjøre, er å finne skjæringspunktet mellom grafene. Det kan gjøres på to måter. Den ene er å bruke kommandoen

Skjæring[<Objekt>, <Objekt>]

Her er erstatter du <Objekt> med henholdsvis f og g. Skjæringspunktet blir merket av på grafene samtidig som det også vises i algebrafeltet. Den andre metoden du kan bruke, er å velge Skjæring mellom to objekt i menyen. Du klikker på den lille røde trekanten i feltet som er merket, og velger deretter Skjæring mellom to objekt. (Se bildet på neste side.) Når du har klikket på Skjæring mellom to objekt, klikker du først på den ene grafen og deretter på den andre grafen.



Når skjæringspunktet er funnet, blir det merket av på grafene, samtidig som det også vises i algebrafeltet.



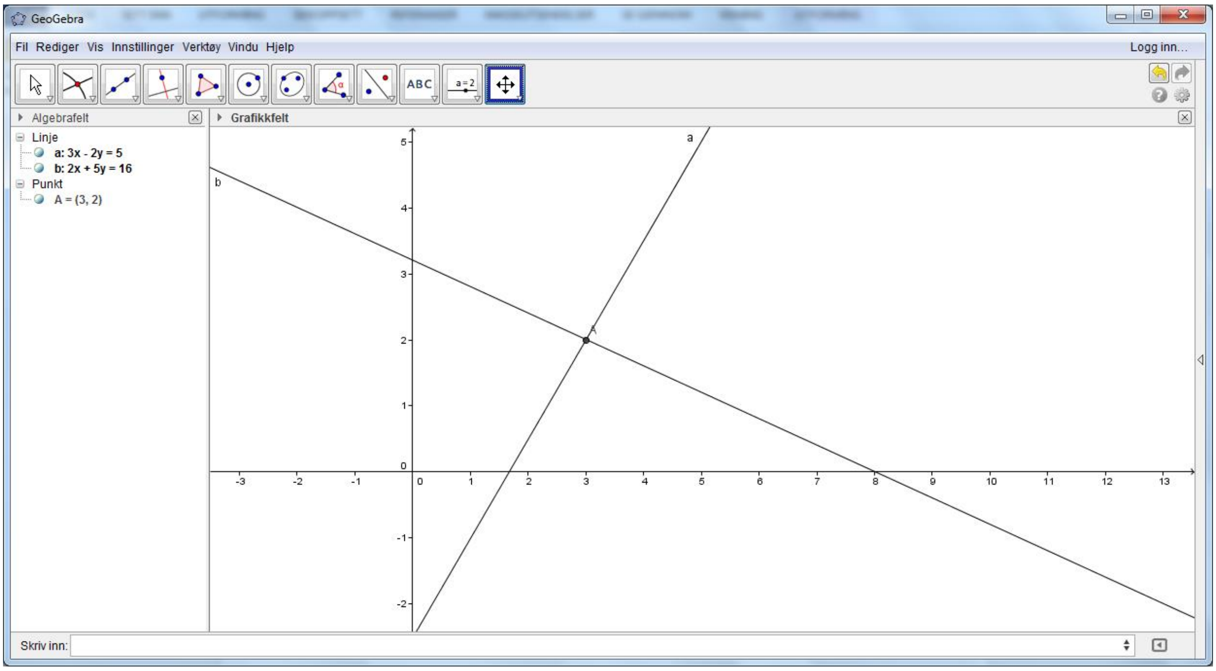
<u>To likninger med to ukjente</u>

GeoGebra kan også brukes til å løse to likninger med to ukjente. La oss se på et eksempel der vi skal løse følgende ligningssystem:

$3x - 2y = 5$

$2x + 5y = 16$

Begge disse uttrykkene er rette linjer. Begge kan omformes til uttrykk på formen $y = ax + b$ som i sin tur kan legges inn i GeoGebra slik vi gjorde innledningsvis i denne øvelsen. Vi kan imidlertid legge inn likningene direkte slik de står også. Da skriver du bare inn likningene i inntastingsfeltet slik det står over. Altså først skriver du inn $3x - 2y = 5$. Deretter skriver du inn den andre likningen. Du finner skjæringspunktet på samme måte som i sted.

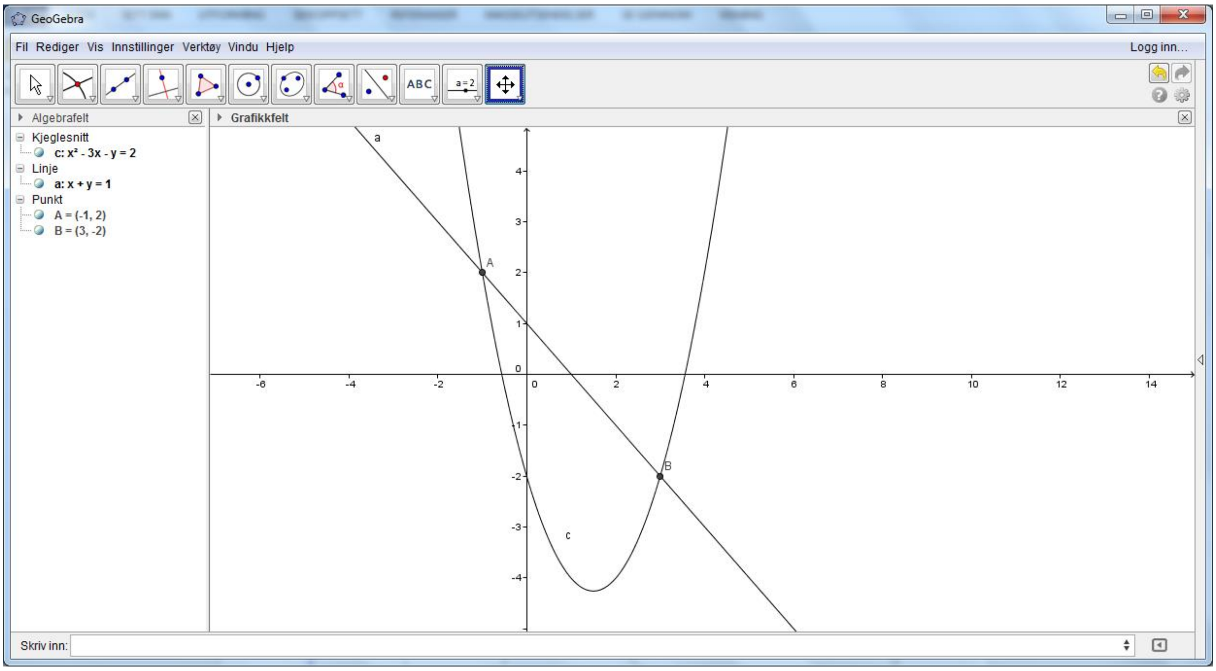


Vi ser at GeoGebra tegner opp linjene selv om de er på den formen som vi har her. Løsningen på likningssystemet kan vi lese av i algebrafeltet.

Det er heller ikke noe i veien for å løse litt mer kompliserte likninger. Prøv å løse likningssystemet

$$x^2 - 3x - y = 2$$
$$x + y = 1$$

Da skal du få opp et bilde omtrent som vist under. Vi ser vi har to løsninger av dette likningssystemet. Den ene løsningen er $x = -1, y = 2$. Den andre er $x = 3, y = -2$.

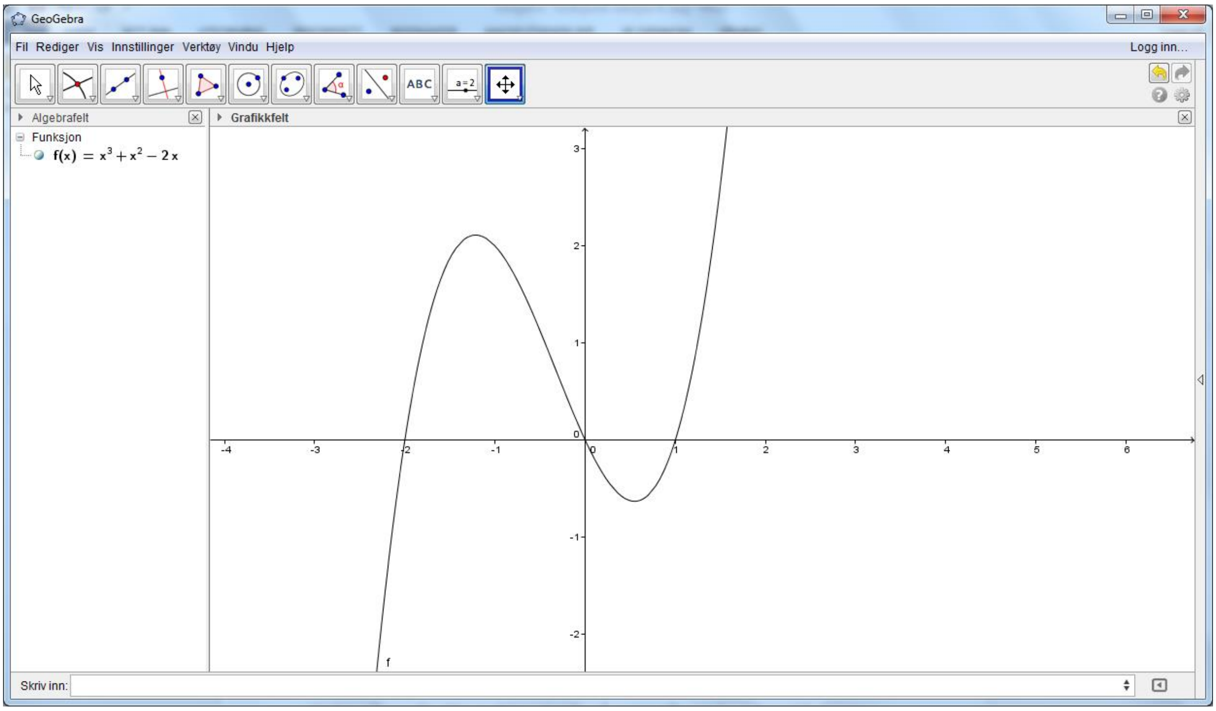


ØVELSE 4. TANGENTER OG MAKSIMUM- OG MINIMUMSPUNKTER

I denne øvelsen skal vi se nærmere på hvordan vi kan bruke GeoGebra for å bestemme den deriverte. Vi skal også tegne inn tangenten i et tilfeldig punkt og deretter flytte punktet langs grafen. Når vi gjør dette, skal vi se på hva som skjer med stigningstallet til tangenten. Vi starter med å åpne et nytt GeoGebra-vindu og tegner inn grafen til funksjonen

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

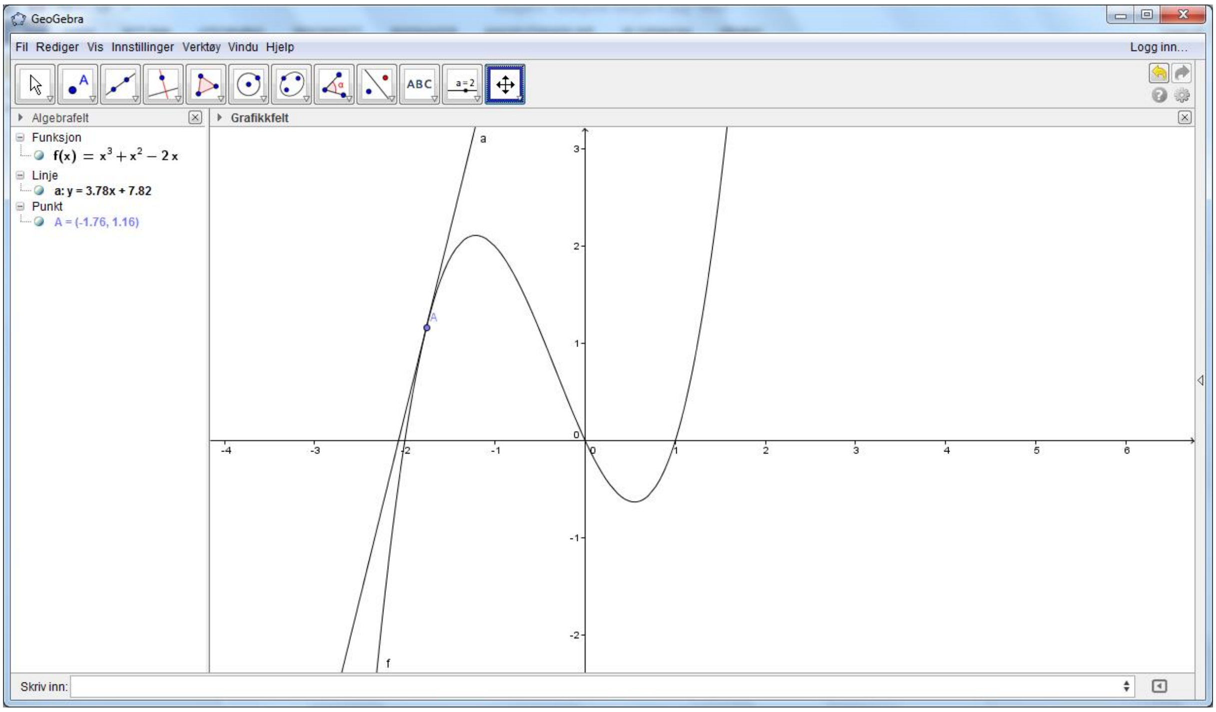
Det gjør du på samme måte som i de forrige øvelsene.



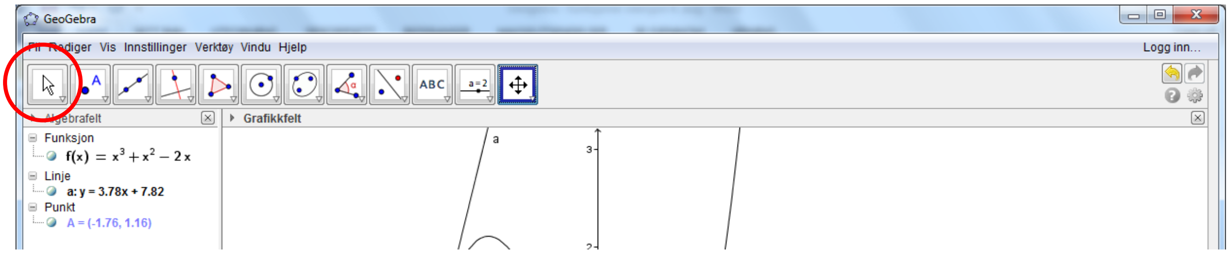
Her kan vi finne nullpunkter og ekstremalverdier på samme måte som for andregradsfunksjonen i øvelse 1. Vi trenger ikke å gjøre det i denne øvelsen. Vi skal heller tegne inn et tilfeldig punkt på grafen og deretter tegne inn tangenten. Tegn inn et punkt en eller annen plass på grafen. Det er ikke viktig hvor det ligger hen. (Se innledningen for hvordan du tegner inn punkter.) Deretter går du til inntastingsfeltet og begynner å skrive tangent. Du får opp flere alternativer og her kan du velge

Tangent[<Punkt>, <Funksjon>]

Der hvor det står <Punkt>, skriver du inn A, og der hvor det står <Funksjon>, skriver du inn f. Du får da tegnet inn tangenten i punktet A på grafen til f. Bildet du får opp, vil se ut omtrent som vist på neste side.



I algebrafeltet ser du at likningen til tangenten er skrevet inn. Det vi skal gjøre nå, er å flytte på punktet A og se hva som skjer med tangenten. For å gjøre det må du klikke på pilen oppe til venstre.



Flytt deretter musepekeren til punktet A og hold venstre musetast nede. Når du nå beveger musen, ser du at du flytter punktet langs grafen. Prøv å følge med på likningen for tangenten når du flytter punktet langs grafen. Hva er stigningstallet når du passerer toppunktet og bunnpunktet?

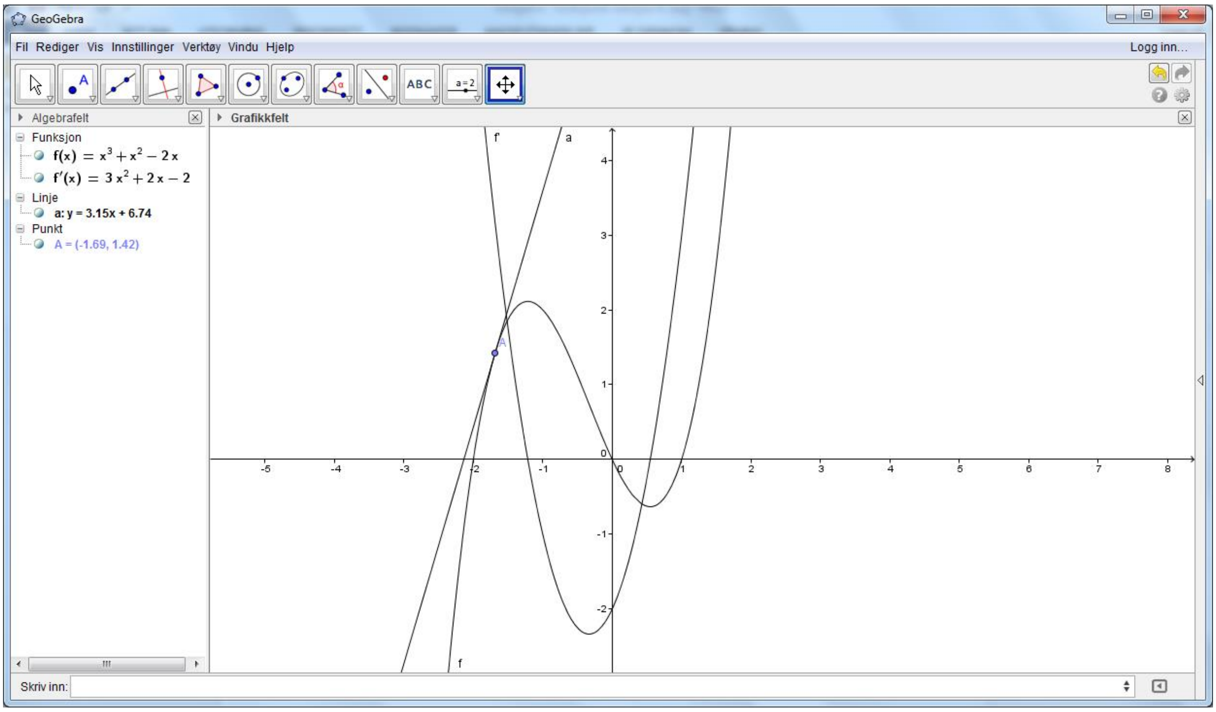
Flytt punktet A slik at x-verdien er på omtrent -2,5. (Det trenger ikke være nøyaktig.) Flytt på nytt punktet langs grafen, og følg med på stigningstallet. I starten vil stigningstallet bli mindre og mindre, før det begynner å øke igjen. Hvor begynner det å øke igjen? Hva tror du dette punktet kalles?

<u>Finne den deriverte</u>

Ofte ønsker en å finne et uttrykk for den deriverte. Dette er noe som selvsagt kan gjøres i GeoGebra. Det er to måter en kan gjøre det på, og vi ser på den ene metoden her. Du går til feltet etter Sett inn og begynner å skrive derivert. Du får opp noen alternativer, og her velger du

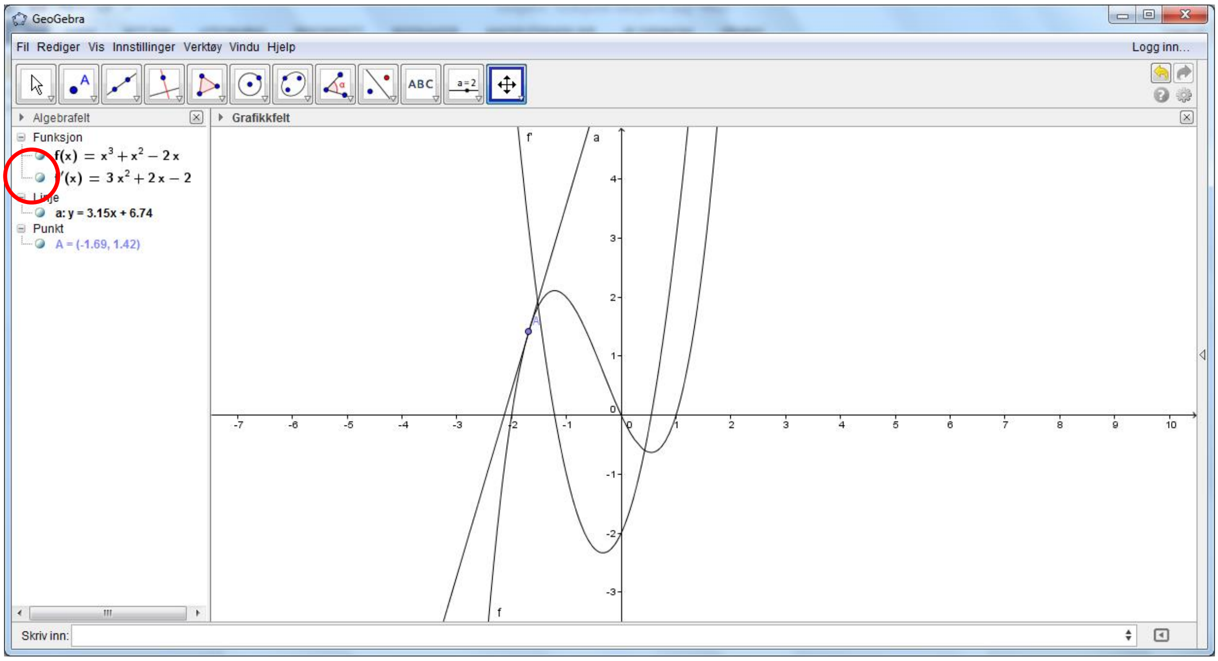
Derivert[<Funksjon>]

Som vanlig erstatter du <Funksjon> med f. Når du har gjort dette, får du opp følgende vindu:



Her ser du at du i algebrafeltet har fått opp et uttrykk for den deriverte. Vi ser også at GeoGebra har tegnet opp grafen til den deriverte. Dette er noe vi vanligvis ikke ønsker, og vi skal straks se på hvordan vi kan ta den vekk. Før vi gjør det skal vi se litt nærmere på grafen til den deriverte. Vi vet jo fra funksjonslæren at der hvor den deriverte er lik 0, har vi et ekstremalpunkt. Hvis vi ser på grafene våre, ser vi at det stemmer.

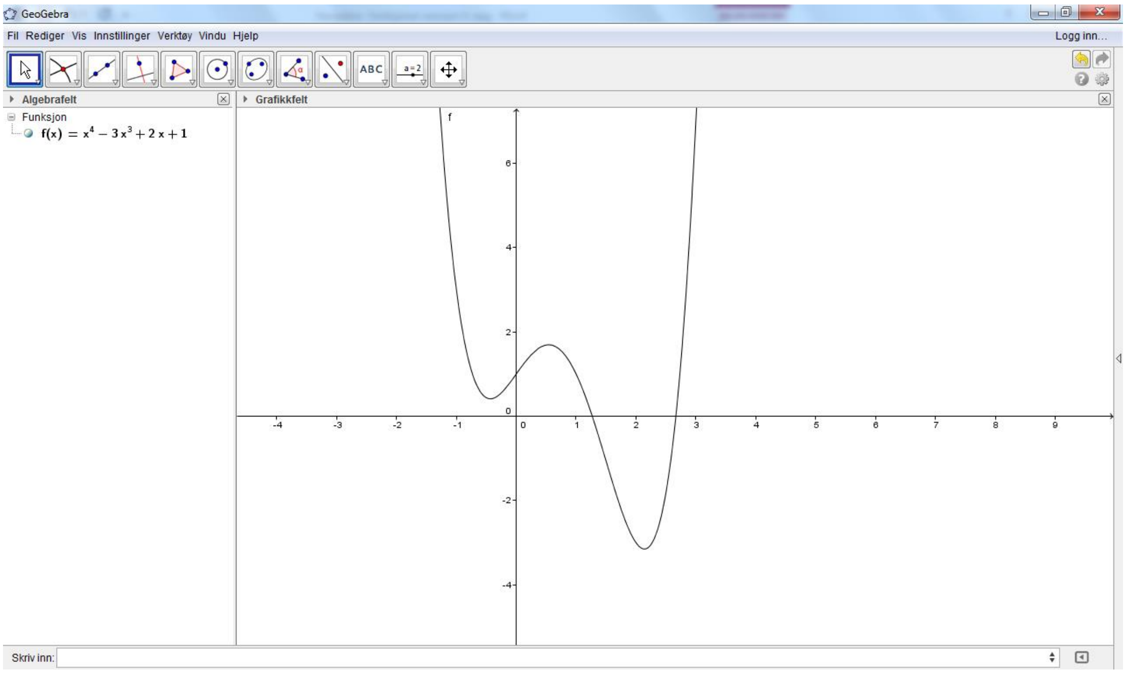
Som sagt vil vi ofte ikke ha med kurven til den deriverte. Den fjerner vi enkelt ved å klikke på den kulen som står foran $f'(x)$. Grafen til den deriverte fjernes, men uttrykket blir stående igjen.



Skulle vi ønske å ta fram igjen kurven for den deriverte, er det bare å klikke på nytt på samme plass.

ØVELSE 5. INTEGRASJON

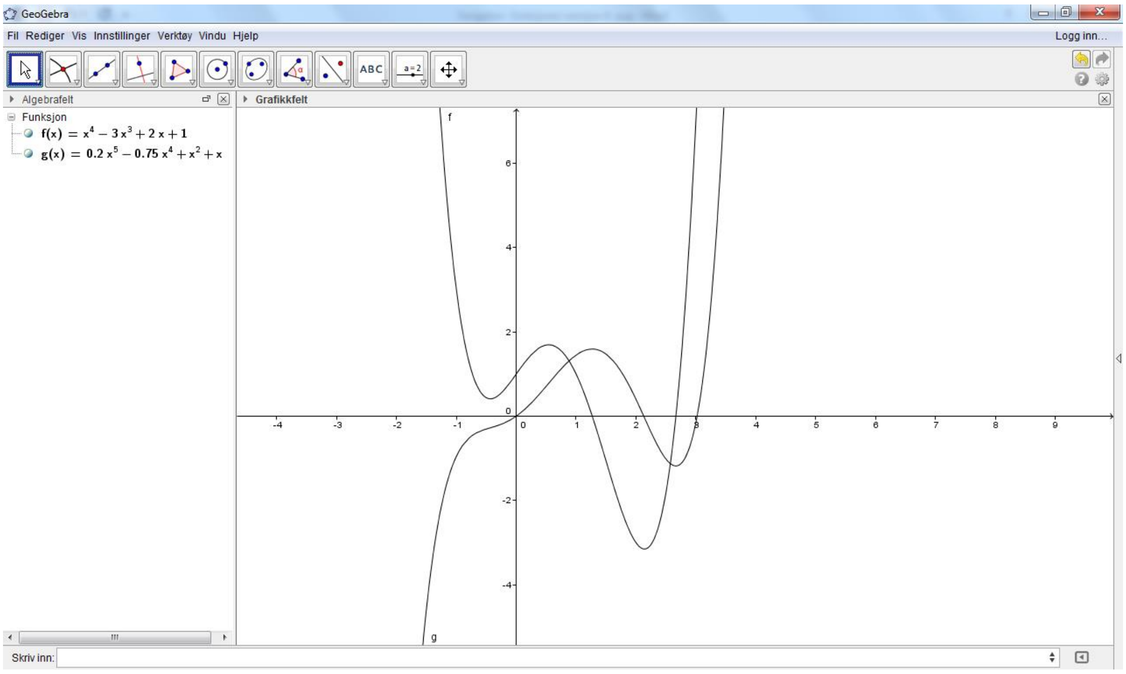
I GeoGebra er det også mulig å utføre integrasjoner. La oss starte med et eksempel. Vi ser på funksjonen $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$. Start med å tegne opp grafen til funksjonen. Du får opp en graf som dette:



La oss først regne ut det ubestemte integralet. Det gjør du ved å begynne å skrive inn integral. Velg alternativet

Integral[<Funksjon>]

Velg her f istedenfor <Funksjon>. Du får opp grafen til integralet uten konstantledd.



Grafen til integralet er noe vi vanligvis ikke har bruk for, så den kan du fjerne på samme måte som vi fjernet kurven til den deriverte i forrige øvelse. Også her ser du at uttrykket for integralet blir stående igjen.

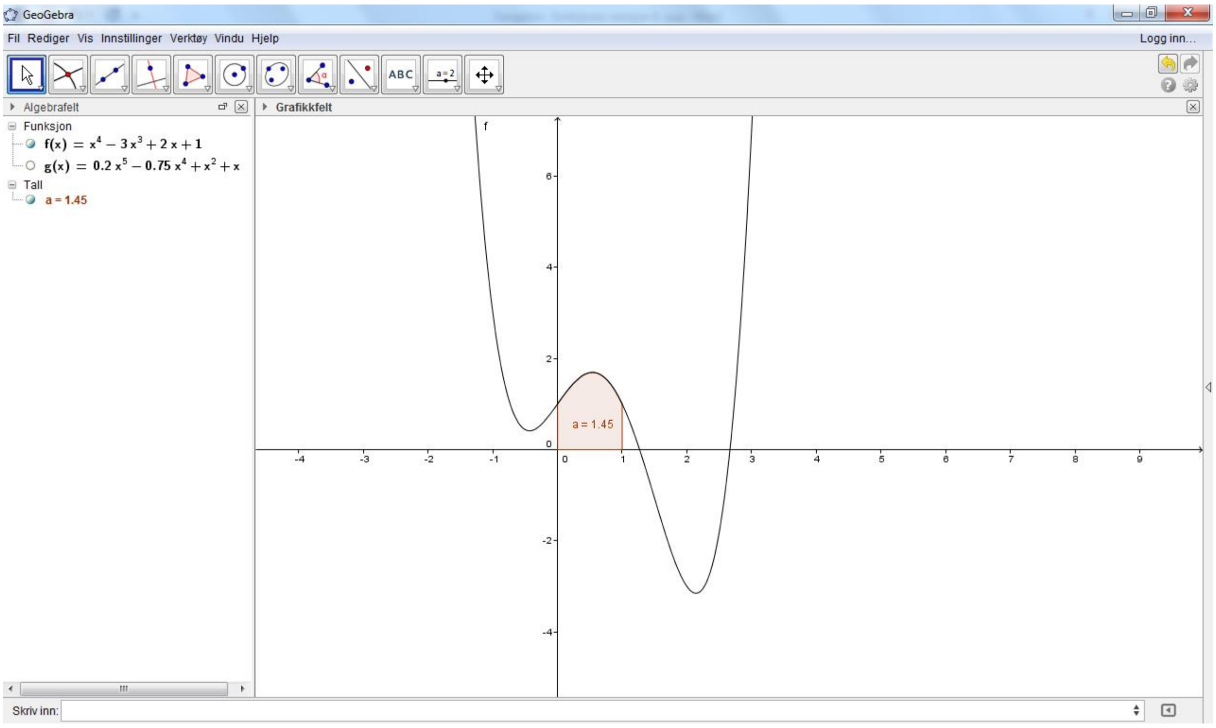
Det en gjerne har mer nytte av å regne ut, er det bestemte integralet. La oss først beregne

$$\int_0^1 (x^4 - 3x^3 + 2x + 1)dx$$

ved hjelp av GeoGebra. Du starter med å skrive inn integral i feltet i inntastingsfeltet og velger deretter

Integral[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]

Her velger du f for <Funksjon>, 0 for <Start> og 1 for <Slutt>. GeoGebra vil da beregne det bestemte integralet mellom 0 og 1. Dette integralet vil også tilsvare arealet avgrenset av linjene $x = 0, x = 1$ og grafen. GeoGebra skraverer området og angir også svaret både i grafen og algebravinduet.



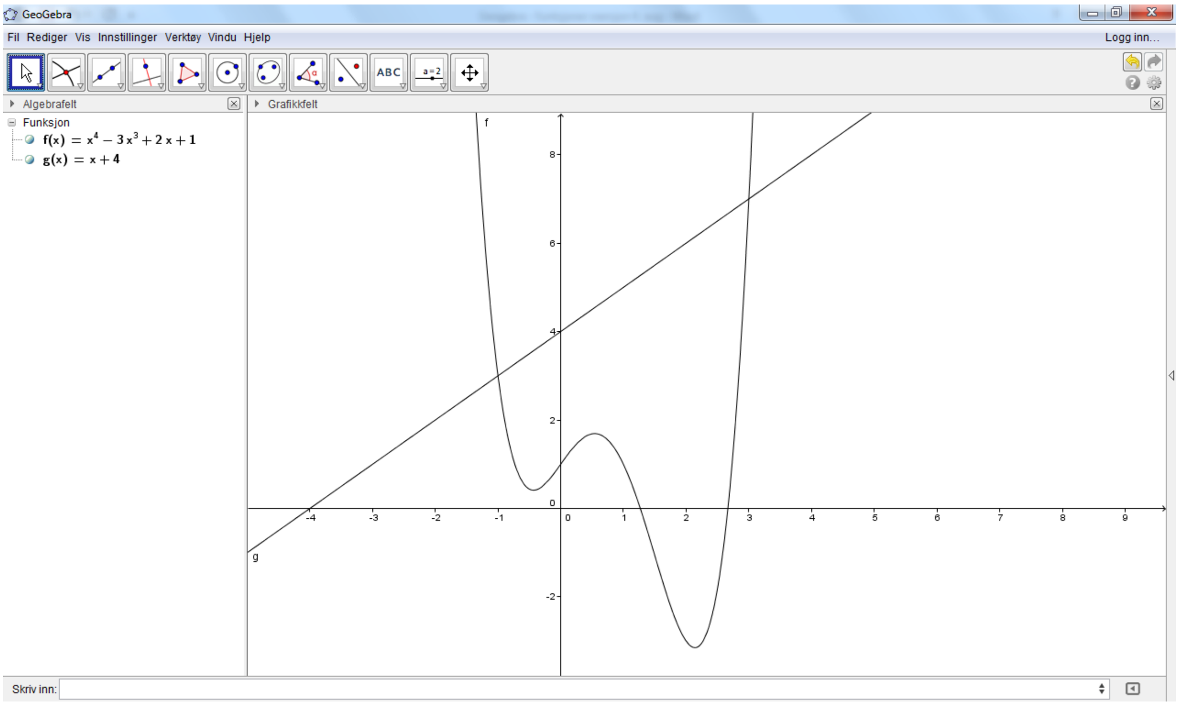
<u>Areal mellom kurver</u>

GeoGebra kan også brukes til å finne areal mellom to kurver. Vi skal i dette eksempelet se på hvordan vi kan beregne arealet mellom grafene til funksjonene

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$$

$$g(x) = x + 4$$

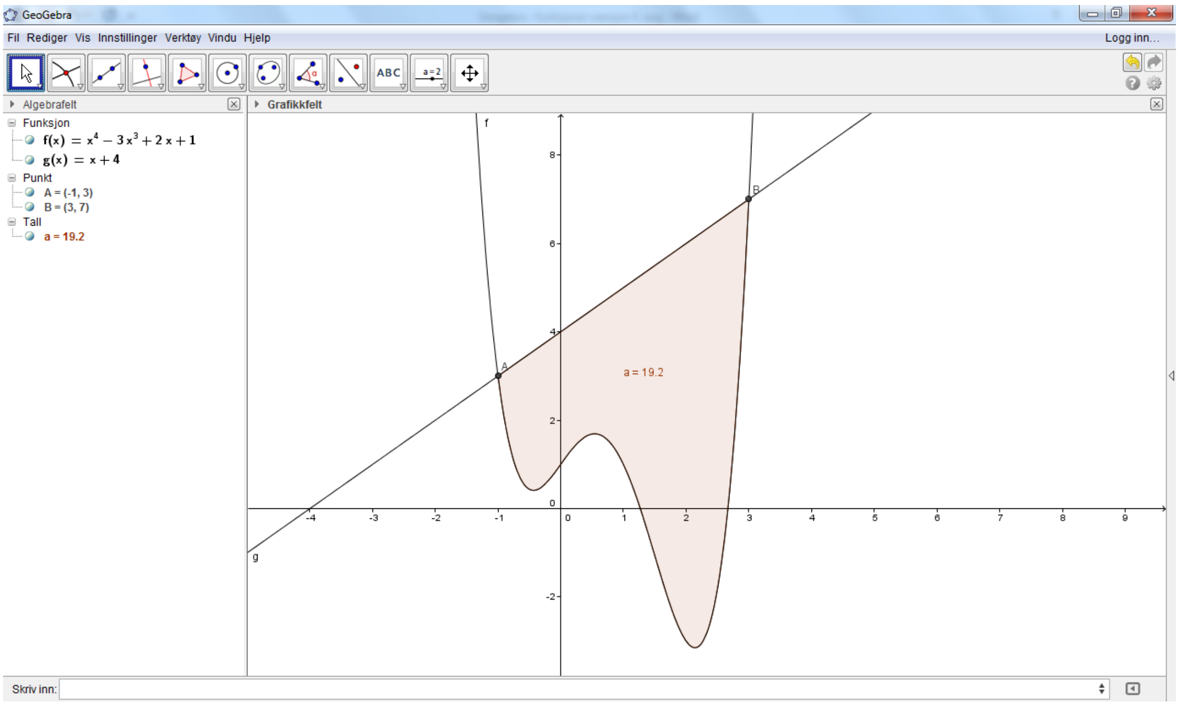
Før vi starter med å tegne grafene kan vi fjerne det forrige integralet vi regnet ut. Det kan du gjøre ved å høyreklikke på a=1,45 i algebrafeltet og velge slett. Funksjonen $f(x)$ har vi allerede, men $g(x)$ må du tegne opp. Den tegner du opp på samme måte som du har gjort med funksjoner tidligere.



Det vi ønsker nå, er å beregne arealet av det området som er avgrenset av grafene. Vi må først finne skjæringspunktet mellom grafene. Det gjør du på samme måte som beskrevet i øvelse 3. Når vi har funnet skjæringspunktene, kan vi finne arealet mellom grafene. Du bruker kommandoen

IntegralMellom[<Funksjon>, <Funksjon>, <Start>, <Slutt>]

Pass på at du erstatter den første <Funksjon> med grafen som ligger øverst. I vårt tilfelle er det $g(x)$. Den andre erstatter du med $f(x)$. Feltene <Start> og <Slutt> erstatter du med -1 og 3 som er x-koordinatene til skjæringspunktene. Området mellom grafene blir skravert, og verdien på arealet vises både på grafen og algebrafeltet.



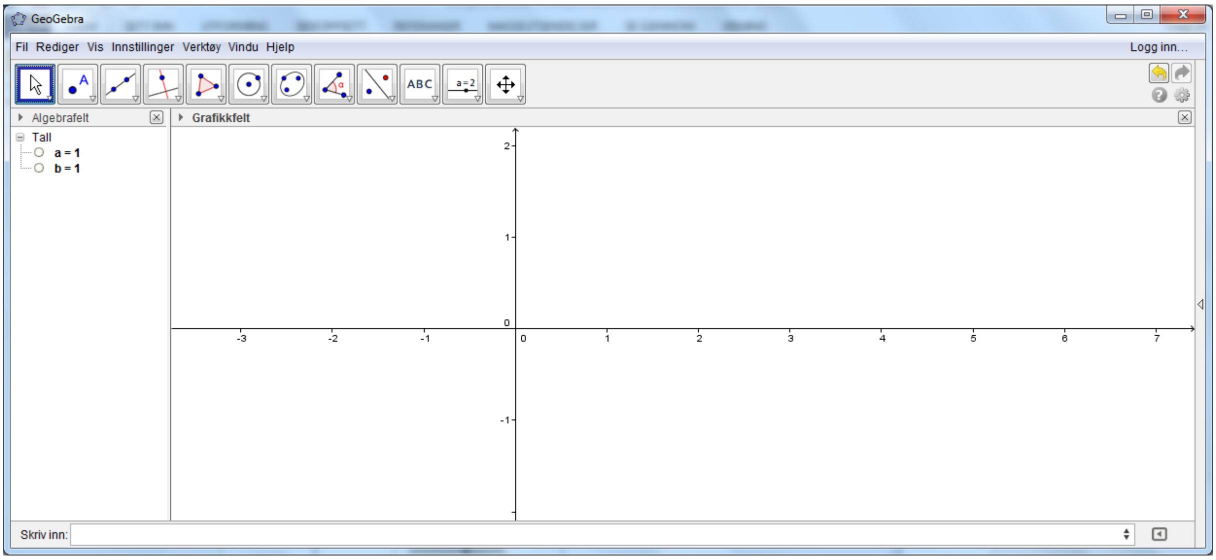
ØVELSE 6. TEGNE GRAFER VED HJELP AV GLIDERE

I GeoGebra har vi noe som heter glidere. Dette er et glimrende verktøy for å studere hvordan grafen til funksjonen

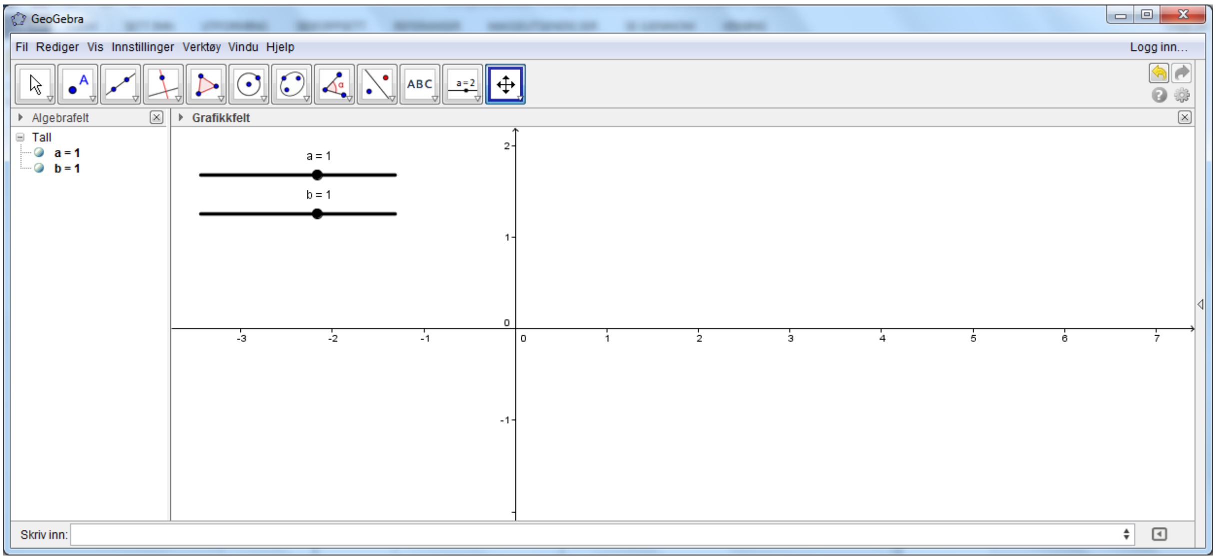
$f(x) = ax + b$

vil forandre seg når vi forandrer a og b.

La oss se på hva en glider er, og hvordan den kan brukes. Det er flere måter å lage glider på. Vi skal først se på en generell måte som også kan brukes i andre sammenhenger. Etterpå skal vi se på en forenklet måte som kan brukes i forbindelse med funksjoner. Vi ser først på den generelle metoden. Du starter med å skrive inn a=1 og deretter b=1 i inntastingsfeltet. Da får du opp følgende vindu:

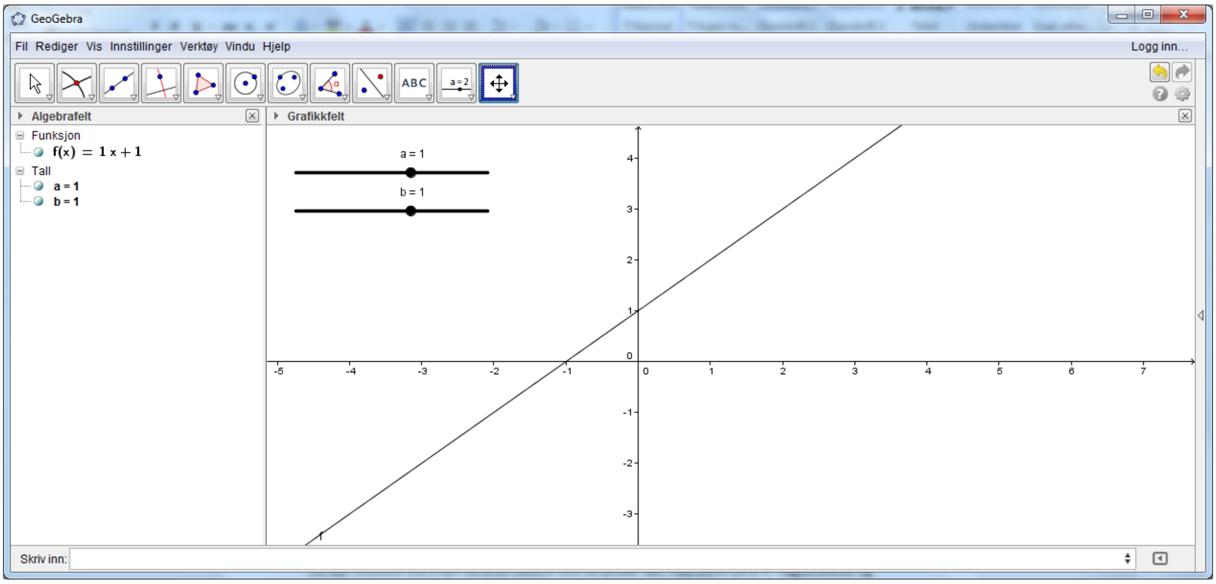


Deretter høyreklikker du først på a=1 og velger Vis objekt. Gjør også det samme for b=1. Da skal du få opp følgende:



Nå skriver vi inn funksjonen vår i inntastingsfeltet. Du skriver altså inn ax+b. GeoGebra tegner nå opp funksjonen med de valgte verdiene for a og b. I dette tilfelle vil det si funksjonen

$f(x) = x + 1$



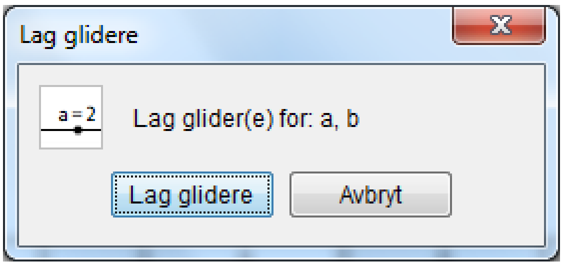
Du kan endre denne funksjonen ved å holde venstre musetast nede og dra i merket under a=1. Verdien til a kan varieres mellom -5 og 5. Prøv dette, og se hvordan funksjonen forandrer seg med ulike valg av a. Gjør deretter det samme for b.

Du kan forandre hva a kan varieres mellom hvis du ønsker det. Høyreklikk på a=1 i algebrafeltet og velg Egenskaper. Der kan du endre grensene. Du kan også endre hvor tett verdiene skal komme ved å endre Animasjonstrinn. Vi trenger ikke å gjøre det nå, men det kan være aktuelt å endre disse senere.

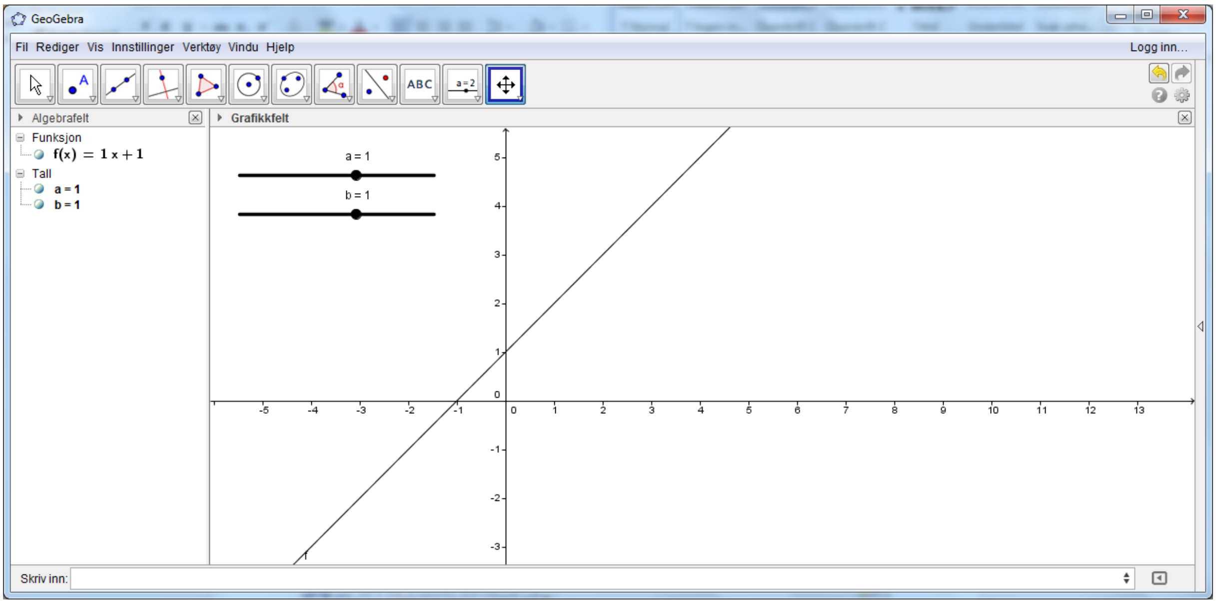
Vi nevnte innledningsvis at det var en enklere metode som kan anvendes i forbindelse med arbeidet med funksjoner. Vi skal se på den. Du kan starte med å slette det du har gjort eller åpne et nytt GeoGebra vindu. I Inntastingsfeltet skriver du inn

ax+b

og trykker enter. Du vil få opp et vindu med spørsmål om du vil definere a og b som glidere. Se under.



Her velger du Lag glidere. Da bli a og b definert som glidere. Bildet vi får opp nå er det samme som vi fikk med andre metoden. I det videre arbeidet bruker vi denne metoden.



<u>Andregradsfunksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$</u>

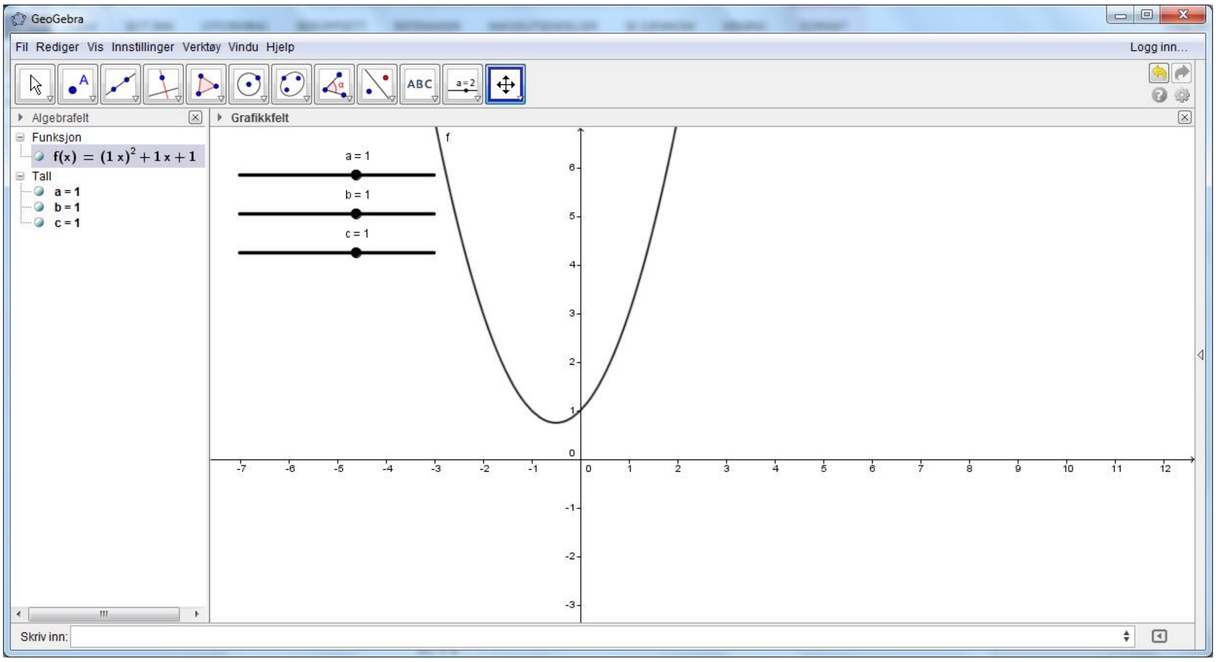
De fleste er jo kjent med hvordan parameterne a og b påvirker en lineær funksjon $f(x) = ax + b$. Litt mindre kjent er kanskje hvordan parameterne a, b og c påvirker funksjonen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La oss se nærmere på det ved å bruke glidere. Du åpner et nytt arbeidsark og skriver du inn funksjonen

ax^2+bx+ c

i inntastingsfeltet. Velg deretter at du skal lage glidere av a, b og c. Da skal du få opp følgende bilde:



Start med å variere parameteren c. Hvordan påvirker dette grafen? Gjør deretter det samme for parameterne a og b. Hvordan endrer grafen seg når a og b varierer?

Brøkfunksjoner

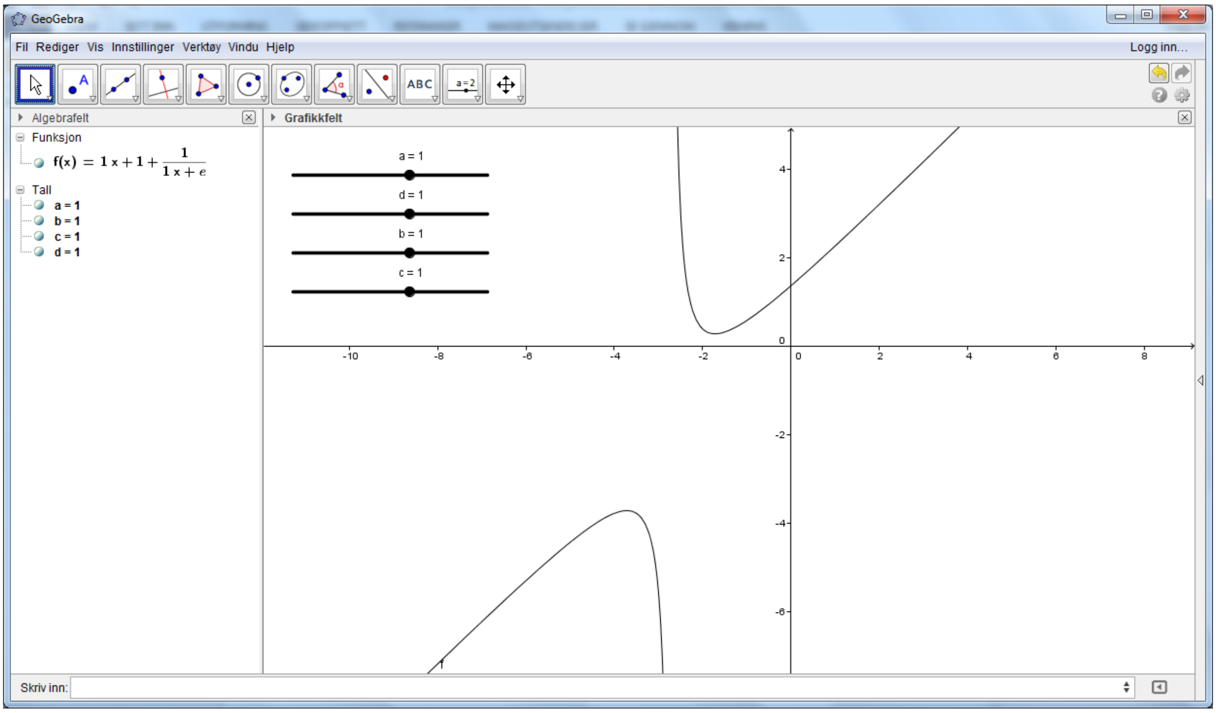
Den siste funksjonen vi skal se på, er brøkfunksjonen

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{dx + e}$$

Vi skriver inn funksjonen

ax+b+c/(dx+e)

i inntastingsfeltet. Deretter velger du Lag glidere slik du har gjort før. Du får opp vinduet



Vi legger merke til at det ikke er tegnet noe glider for e. Ser vi litt nøyere etter på funksjonen ser vi at e'en i er skrevet i kursiv som *e.* GeoGebra tror her mener tallet *e* (*e*=2,71828……) og ikke e som en glider. GeoGebra definerer den derfor ikke som en glider. Det vi kan gjøre er for å løse problemet er å anvende metoden vi brukte først. Skriv inn e=1 i inntastingsfeltet og trykk på Enter. Høyreklikk deretter på e=1 og velg Vis objekt. Vi har nå fått definert e som en glider. Det siste vi må gjøre er å endre selve funksjon. Dobbelklikk på funksjonen og erstatt *e* med e.

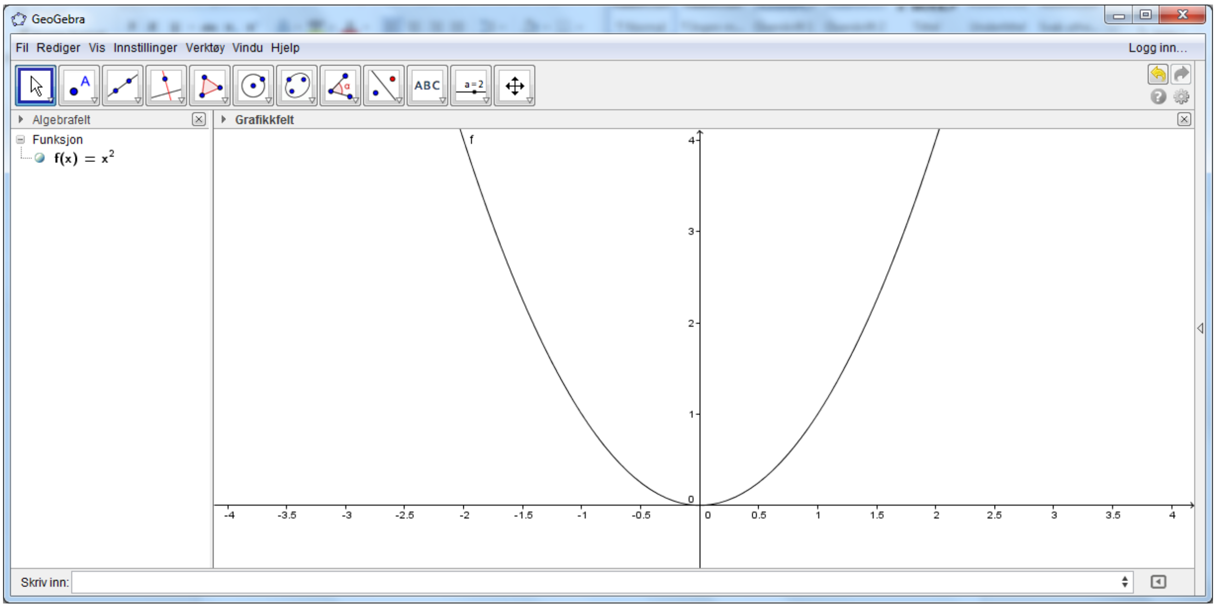
Her kunne det vært fristende å tegne inn asymptotene samtidig, men det er ikke så lurt å gjøre. GeoGebra bruker lang tid på å tegne opp asymptotene, og det vil se ut som om programmet står og henger hvis du prøver å variere parameterne. Prøv nå å variere parameterne etter tur, og se hvordan de påvirker grafen.

ØVELSE 7. RIEMANN-INTEGRALET MED BRUK AV GLIDERE

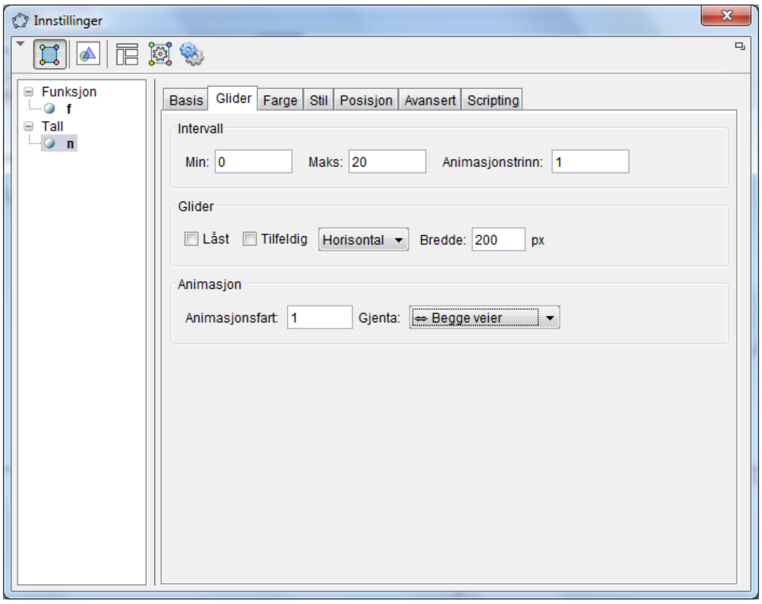
I QED 5–10 bind 2 har vi sett hvordan vi definerer Riemann-integralet. Dette er noe vi kan bruke GeoGebra til å visualisere. Vi bruker funksjonen

$f(x) = x^2$

som eksempel. Start med å tegne denne funksjonen. Forstørr også x-aksen slik vi har gjort.



Det neste du skal gjøre, er å definere en glider n. Skriv n=4 i inntastingsfeltet, og definer den deretter som en glider. Det neste du skal gjøre, er å høyreklikke og velge Egenskaper. Så endrer du intervallet fra -5 til 5 til 0 til 20. Endre også Animasjonstrinn fra 0,1 til 1.



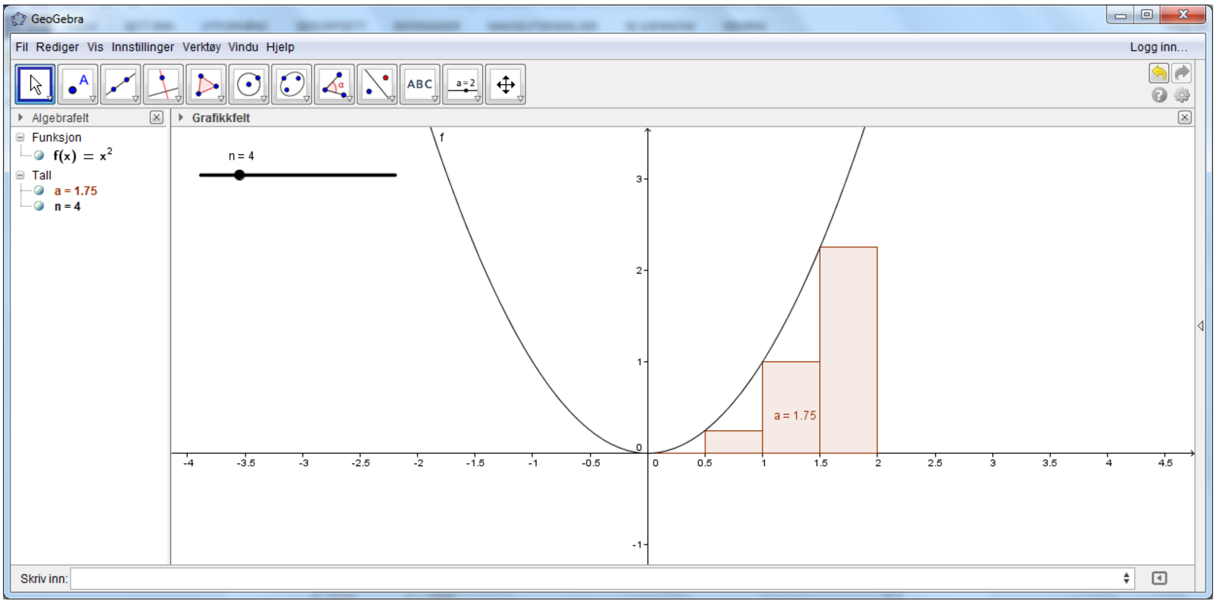
Det neste vi skal gjøre, er å tegne opp rektangler under grafen. Det finnes en funksjon som hjelper oss med dette:

SumUnder[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>, <Antall rektangler>]

Her erstatter du <Funksjon> med f, <Start> med 0, <Slutt> med 2 og <Antall rektangler> med n slik at funksjonen ser slik ut:

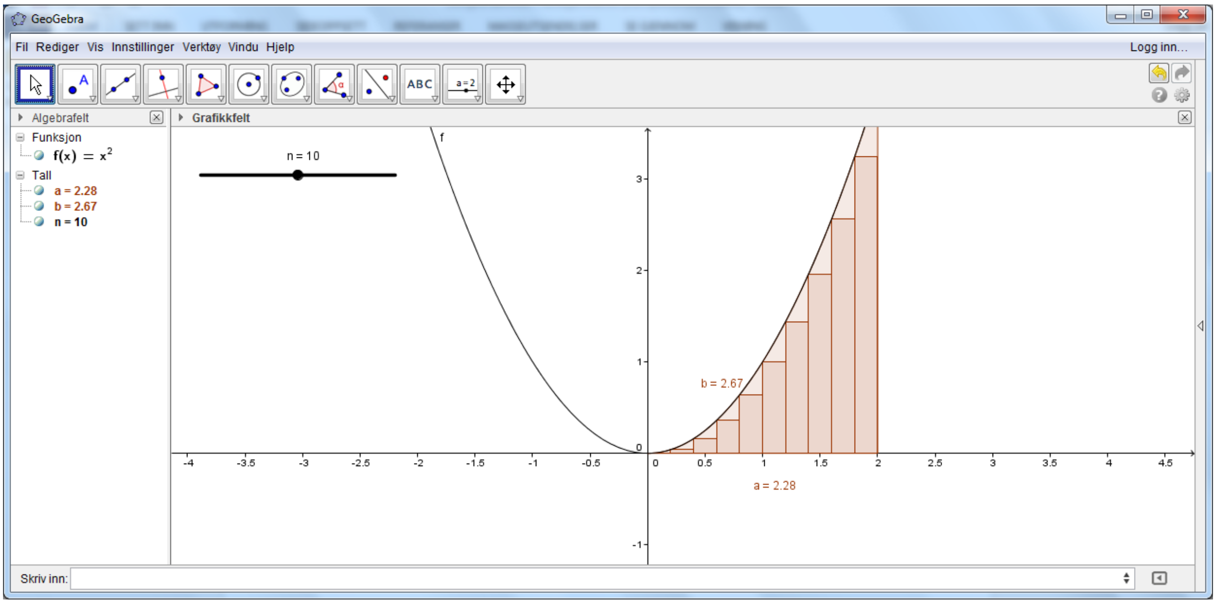
SumUnder[f,0,2,n]

Du vil nå få tegnet opp rektangler under funksjonen. Siden vi har valgt n=4, ser du at du får 4 rektangler. (Det første rektangelet har høyde på 0 og er ikke synlig.)



Prøv å endre n, og se hva som skjer. Hvordan går det med arealet når n økes?

Regn ut integralet for intervallet 0 til 2 for funksjonen slik at det tegnes sammen med rektanglene. Kommandoen Integral[f,0,2] gjør den jobben for oss.



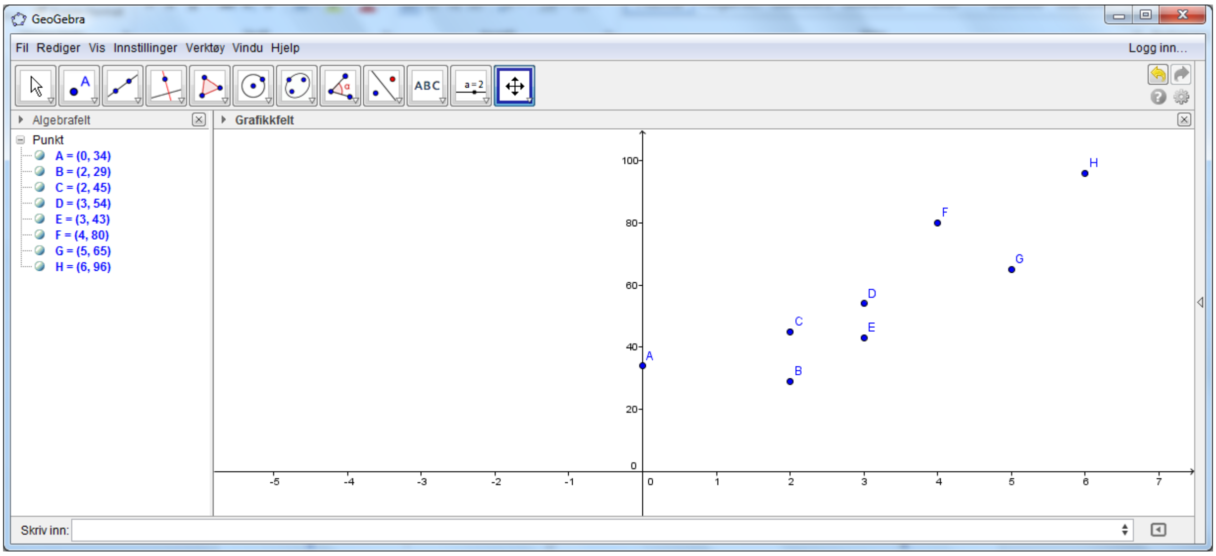
Hvordan er forholdet mellom summen av rektangler og integralet når vi øker antall rektangler? Prøv å endre intervallet for glideren slik at øverste verdi blir 100 istedenfor 20. Hvordan går det med arealet av rektanglene i forhold til integralet når antall rektangler økes enda mer?

ØVELSE 8. ENKEL REGRESJON

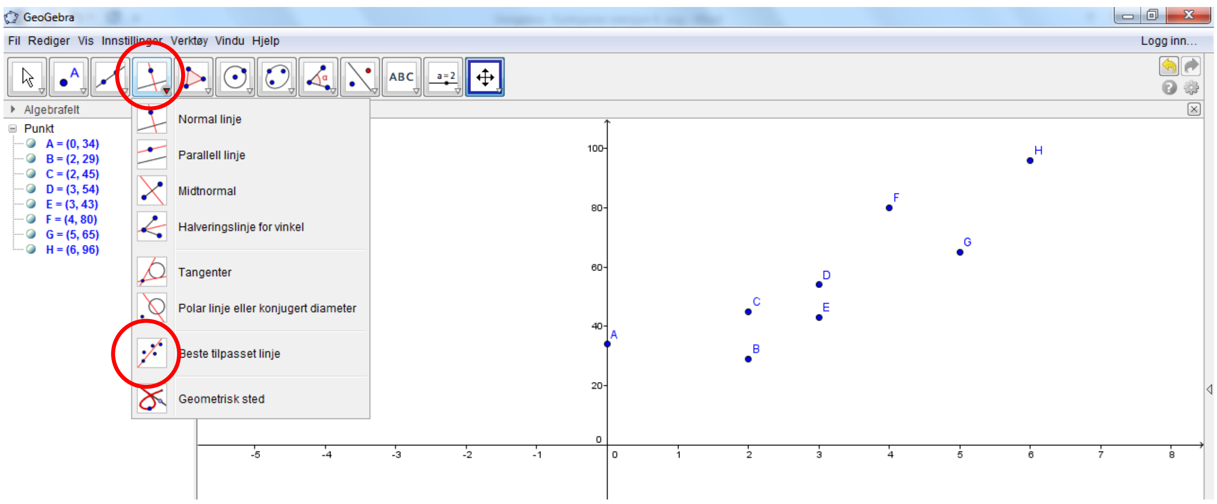
Regresjon ligger litt i grenseland mellom statistikk og funksjonslære. I QED er temaet plassert under statistikk, men temaet er likevel så pass knyttet mot funksjonslæren at vi tar med en øvelse her. La oss se på et eksempel på hvordan en kan bruke GeoGebra til regresjon. Vi tar utgangspunkt i en gruppe elever der læreren har undersøkt hvor mange timer i uken de bruker på matematikk hjemme. Resultatet fra denne undersøkelsen er oppgitt under, sammen med poengsummen elevene oppnådde på en prøve like etterpå. Maks. uttelling var 100 poeng.

Antall timer lesing	0	2	2	3	3	4	5	6
Poeng på prøve	34	29	45	54	43	80	65	96

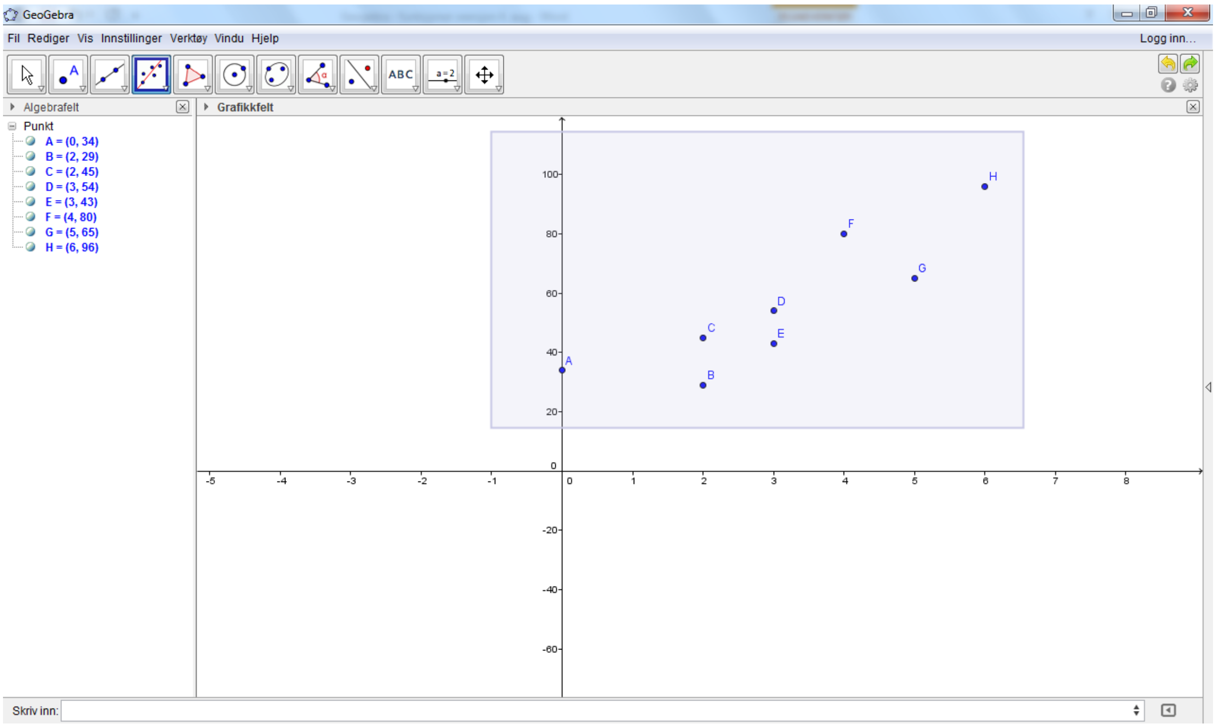
Vi ønsker å tegne opp disse punktene i koordinatsystemet og deretter finne ei linje som er tilpasset dataene. Du må starte med å legge inn alle 8 punktene. Vi startet med 0 og 34. For å legge inn dette punktet skriver du A=(0,34) i inntastingsfeltet. Det neste punktet legger du inn ved å skrive B=(2,29) i inntastingsfeltet. På samme måte legger du inn resten av punktene.



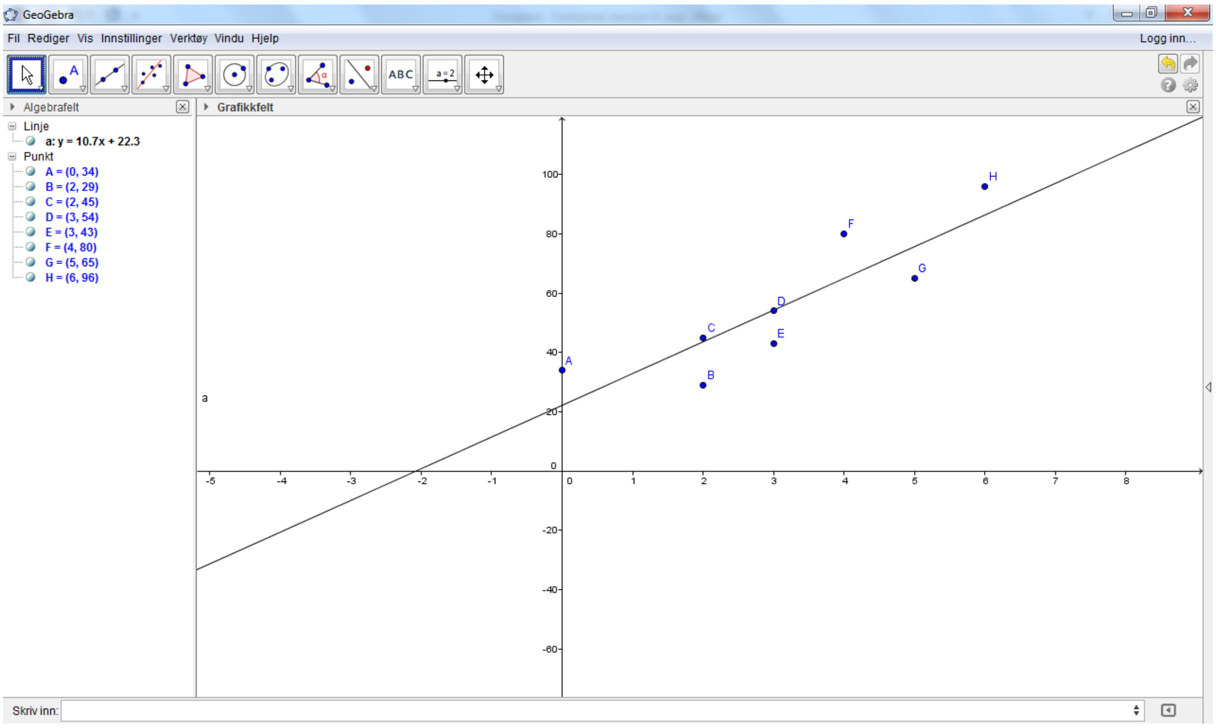
Det neste vi skal gjøre, er å legge inn ei linje som er tilpasset dataene. Det kan gjøres på en elegant måte i GeoGebra. Klikk på ruten som er vist under, og velg alternativet som er angitt.



Når du har valgt ruten med Beste tilpasset linje, skal vi gå videre til neste steg. Du holder nede venstre musetast og merker et rektangulært område slik at punktene er med.



Deretter slipper du musetasten og regresjonslinja blir tegnet inn. Du får i tillegg opp likningen for linja i algebrafeltet.



Metoden som GeoGebra bruker, er minste kvadraters metode. Vi kan også beregne korrelasjonskoeffisienten. Det gjøres med kommandoen

Korrelasjonskoeffisient[<Liste med punkt>]

Her må du liste opp alle punktene slik vi har gjort under:

Korrelasjonskoeffisient[A, B, C, D, E, F, G, H]

Pass på at du bruker store bokstaver her, da regresjonslinja er betegnet med liten a. Vi ser at vi i dette tilfellet får en korrelasjonskoeffisient på 0,87, noe som indikerer at det er godt samsvar mellom antall timer elevene bruker på hjemmearbeid i matematikk og resultatet på prøven.

En kan også utføre mer avanserte regresjonsberegninger i GeoGebra enn det vi har gjort med lineær regresjon. En kan bruke polynomfunksjoner og eksponentialfunksjoner istedenfor lineære funksjoner. Vi skal imidlertid ikke gå inn på disse tingene her, da det faller langt utenfor pensumet i lærerutdanningen.

ØVELSE 9. KJEGLESNITT

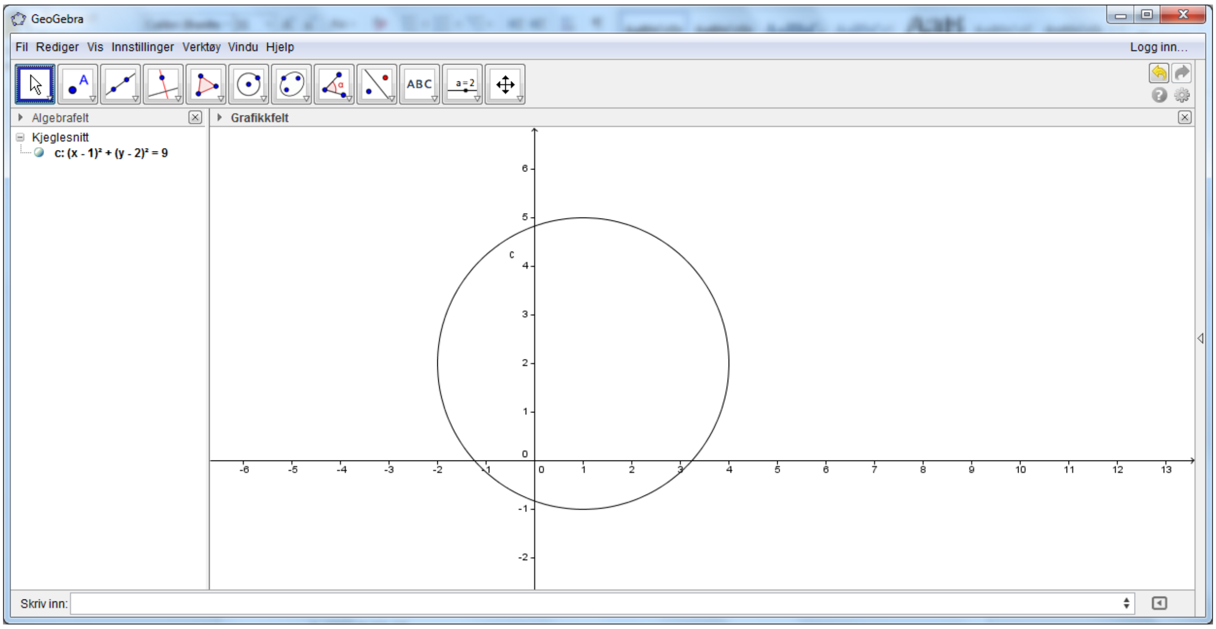
Som vi har nevnt innledningsvis, finnes det en rekke andre anvendelser av GeoGebra. En type kurver vi så langt ikke har berørt, er f.eks. sirkler og ellipser. En sirkel med sentrum i punktet $(1,2)$ med radius på 3 er gitt ved likningen

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

Slike kurver er ikke noe problem å tegne opp i GeoGebra. Ønsker du å tegne opp denne sirkelen, skriver du

(x-1)^2+(y-2)^2=3^2

i inntastingsfeltet. Da får du tegnet opp sirkelen:



Vi kan også beregne sentrum i sirkelen. Det gjøres med kommandoen

Sentrum[<Kjeglesnitt>]

Her erstatter du <Kjeglesnitt> med c. Da blir sentrum tegnet inn, samtidig som det også oppgis i algebrafeltet. En kan også beregne arealet av sirkelen. Det gjøres med funksjonen

Areal[<Kjeglesnitt>]

Også her erstatter du <Kjeglesnitt> med c.

Du kan flytte sirkelen rundt i grafikkfeltet. Sørg for at du har klikket på pilen oppe til venstre. Hold deretter venstre musetast nede mens du flytter sirkelen rundt. Hva skjer med likningen når du flytter sirkelen? Forandrer arealet seg?

Ellipser

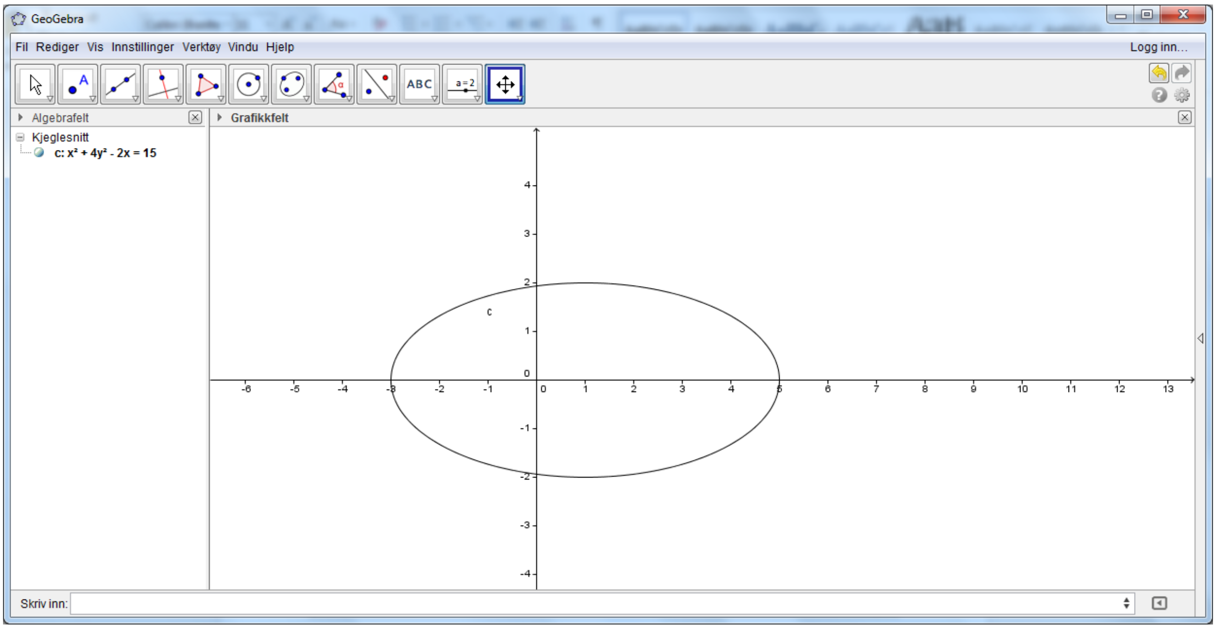
En kan også tegne ellipser i GeoGebra. La oss tegne inn ellipsen

$(x-1)^2 + 4y^2 = 16$

Du skriver inn uttrykket

(x-1)^2+4y^2=16

i inntastingsfeltet. Ellipsen blir da tegnet opp, og uttrykket vises i algebrafeltet. Vær oppmerksom på at GeoGebra ganger ut parentesen og trekker sammen uttrykket før det vises i algebrafeltet.



En kan omforme uttrykket i algebrafeltet til et uttrykk på formen

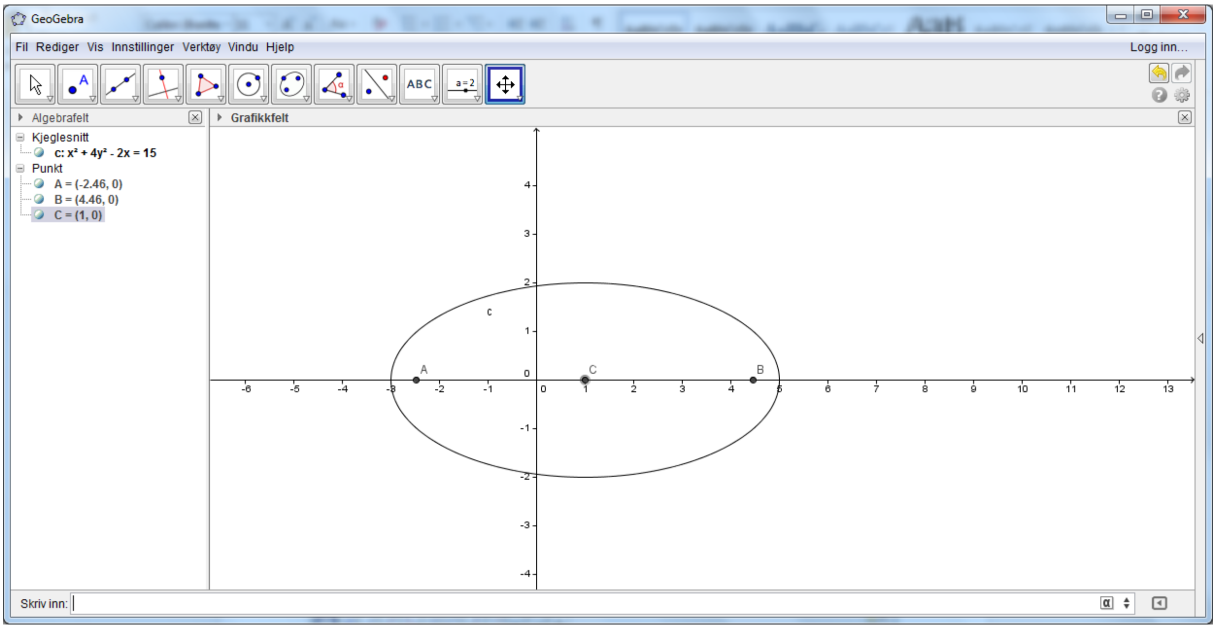
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(x-n)^2}{b^2} = 1$$

Det gjør du ved å høyreklikke på uttrykket i algebrafeltet og deretter velge at du vil ha det på denne formen.

Du kan også finne brennpunktene til ellipsen og sentrum av ellipsen. Sentrum finner du på samme måte som for sirkelen. Brennpunktene finner du med kommandoen

Brennpunkt[<Kjeglesnitt>]

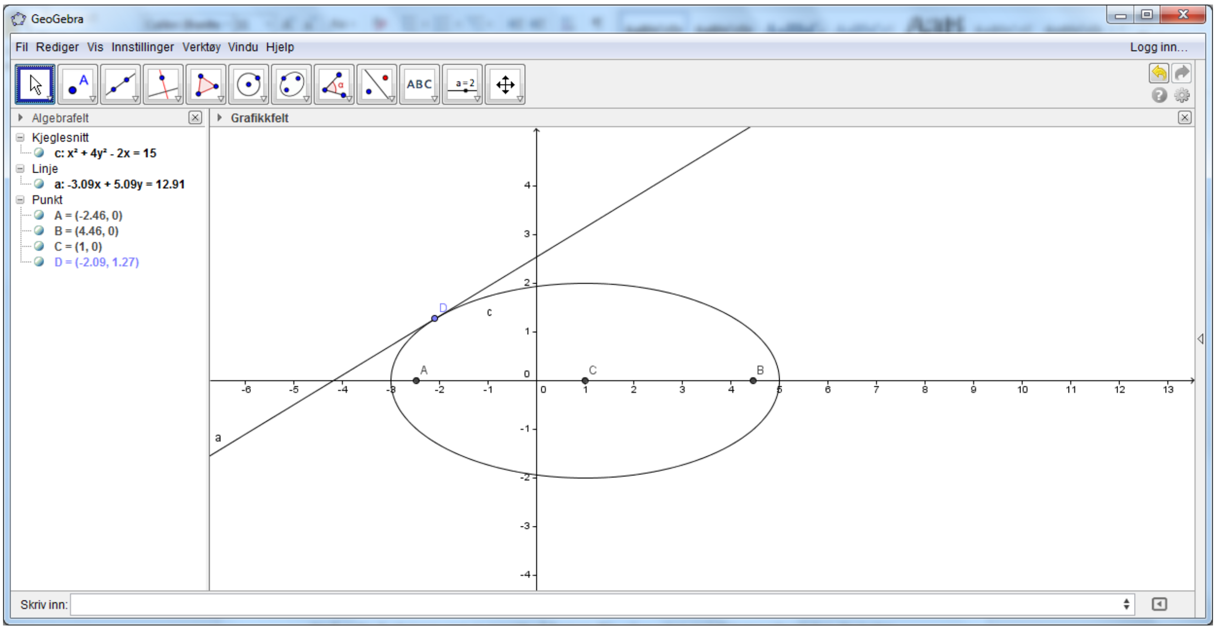
Bildet du får opp når du har brukt disse kommandoene, vises på neste side.



Vi kan også tegne opp en tangent og beregne likningen for denne ved hjelp av GeoGebra. Start med å definere et punkt som ligger på kurven. Det er det samme hvor du legger punktet. Dette punktet vil ha navn D siden vi har brukt A, B og C på brennpunkt og sentrum. Kommandoen

Tangent[<Punkt>, <Kjeglesnitt>]

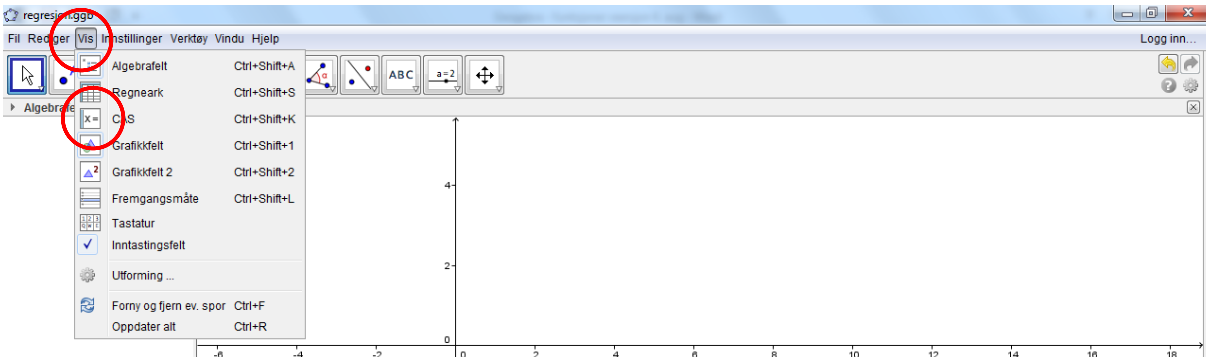
tegner inn tangenten til kurven i punkt D når du erstatter <Punkt> med D og <Kjeglesnitt> med c



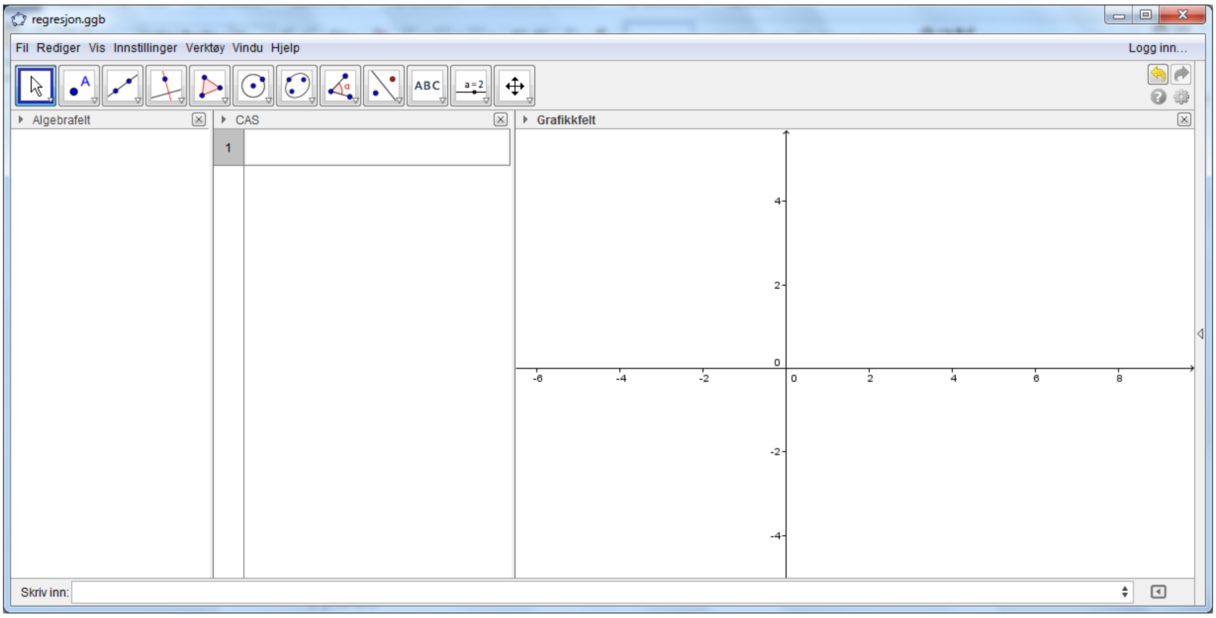
Også andre funksjoner som er oppgitt på formen $f(x, y) = c$, kan en lett tegne i GeoGebra. De tastes inn på samme måte som vi har gjort for sirkelen og ellipsen. En kunne bygget dette videre ved å legge inn glidere for a og b og sett hvordan ellipsen ville ha sett ut for ulike valg av a og b. Dette kan du eventuelt utforske videre på egen hånd.

ØVELSE 10. CAS

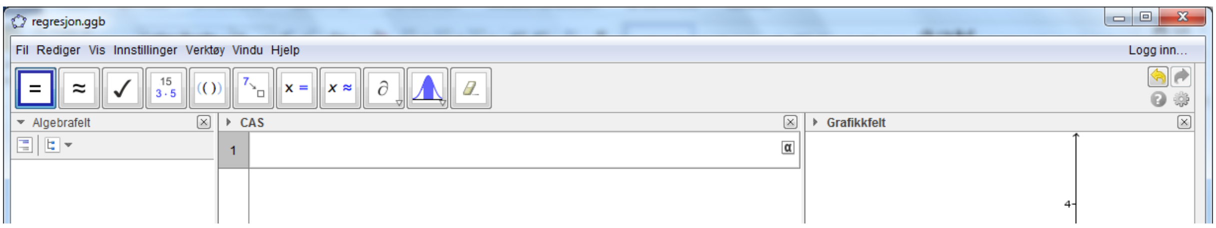
De siste versjonene av GeoGebra inneholder det vi kaller en CAS-modul. CAS står for *computer algebra system* og er en modul der vi kan gjøre symbolske beregninger. Eksempler på det er løsning av likninger og beregning av den deriverte. Vi skal se på noen av mulighetene som ligger i CAS innen funksjonslæren. Det første vi må gjøre, er å få fram CAS-vinduet. Du velger Vis på menyen og haker deretter av for CAS.



Skjermbildet du får opp når du har valgt CAS, er vist under.



Vi ser at vi har fått opp et felt mellom algebrafeltet og grafikkfeltet. Det er her vi kan gjøre symbolske beregninger. Vi skal se på hvordan dette fungerer. Det er en egen rad med knapper som hører til CAS-modulen. Klikker du en eller annen plass i CAS-vinduet får du fram denne knapperaden, som vi viser på bildet under.



Vi skal se på noen eksempler på hva vi kan gjøre med CAS-verktøyet. Vi starter med å se på hvordan vi kan bruke det til løsning av likninger.

<u>Løsning av likninger</u>

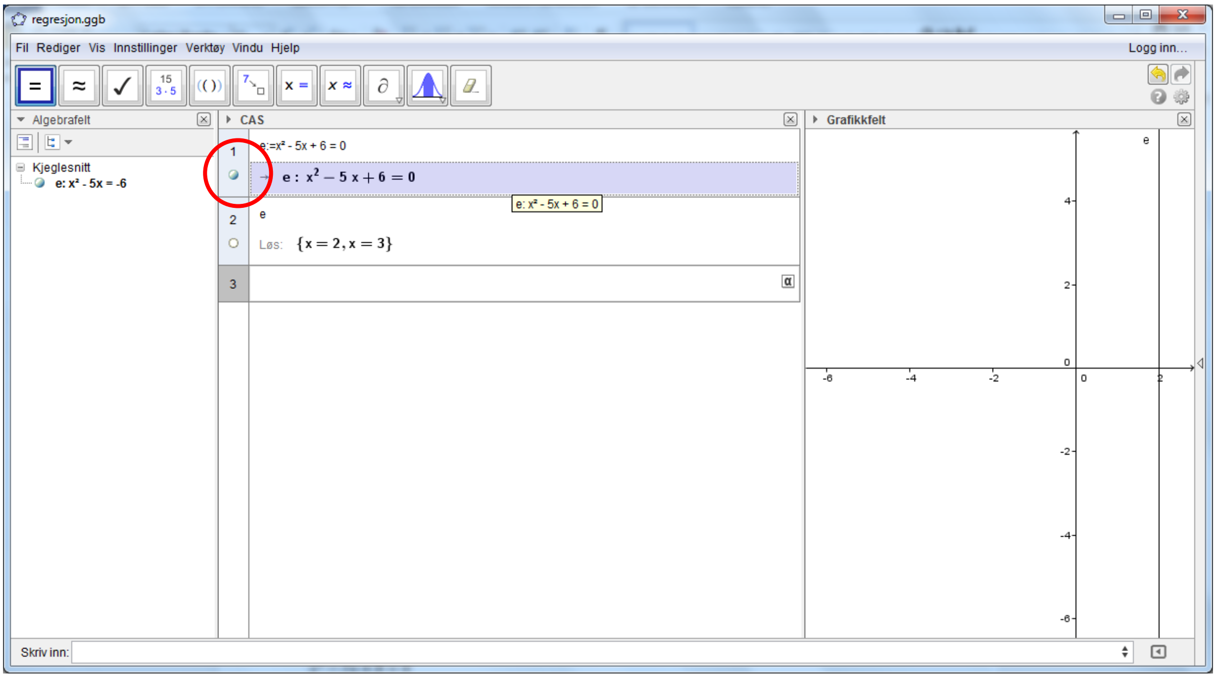
La oss se på et enkelt eksempel. Vi ønsker å løse likningen

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Du skriver inn

x^2-5x+6=0

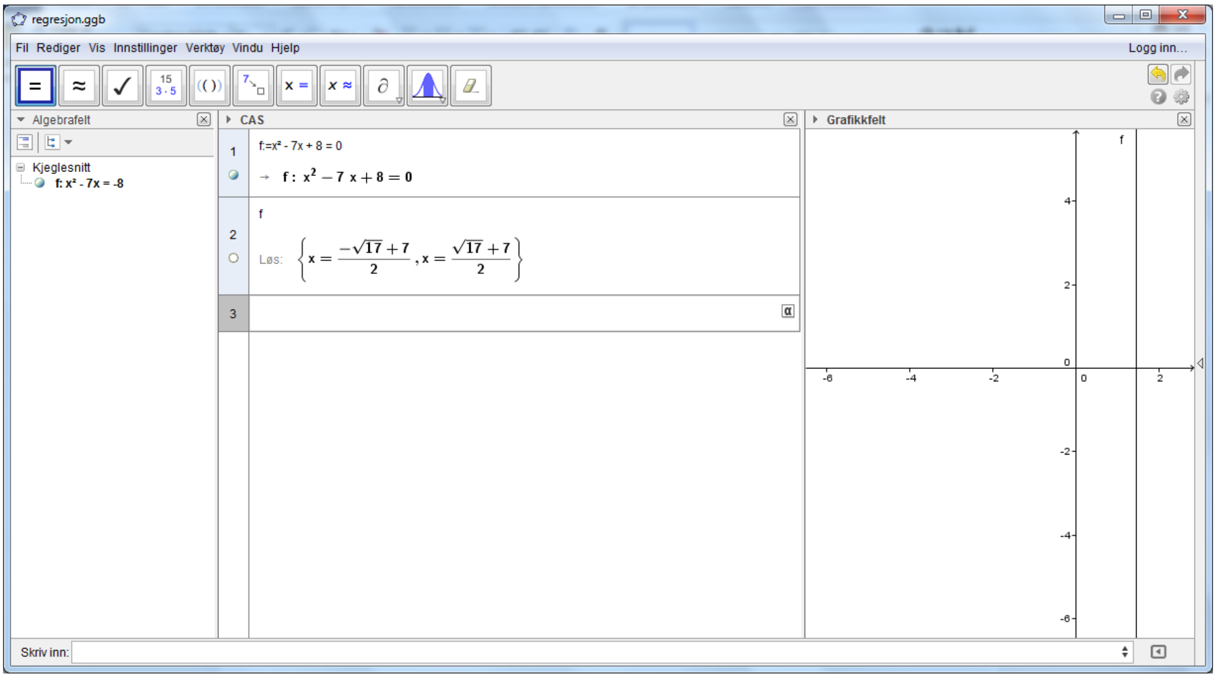
i feltet etter 1-tallet i CAS-modulen. Trykk på Enter. Deretter markerer du feltet under 1-tallet (se under) og trykker på knappen. Da vil likningen bli løst. Her ser vi at vi får heltallsløsninger.



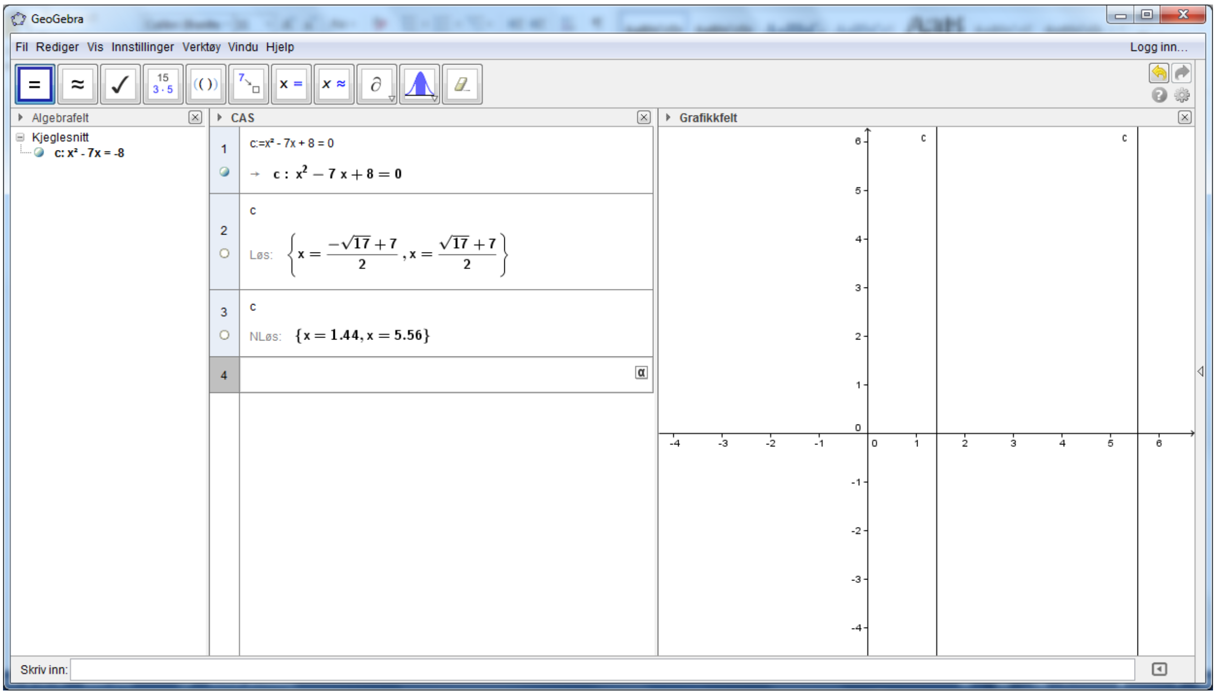
GeoGebra takler selvsagt mer kompliserte likninger også. Hvis du vil blanke ut feltene før du går videre, merker du feltene du vil slette, og trykker på knappen med bilde av viskelær. Det er knappen helt til høyre i knapperaden. La oss prøve å løse likningen

$$x^2 - 7x + 8 = 0$$

Skriv inn uttrykket på samme måte som i sted, og løs denne. Her ser du at du får opp eksakte løsninger.



Vi kan også få opp løsningene skrevet som desimaltall. Da trykker du istedenfor på knappen ved siden av, der det står $x \approx$. Du får da opp:

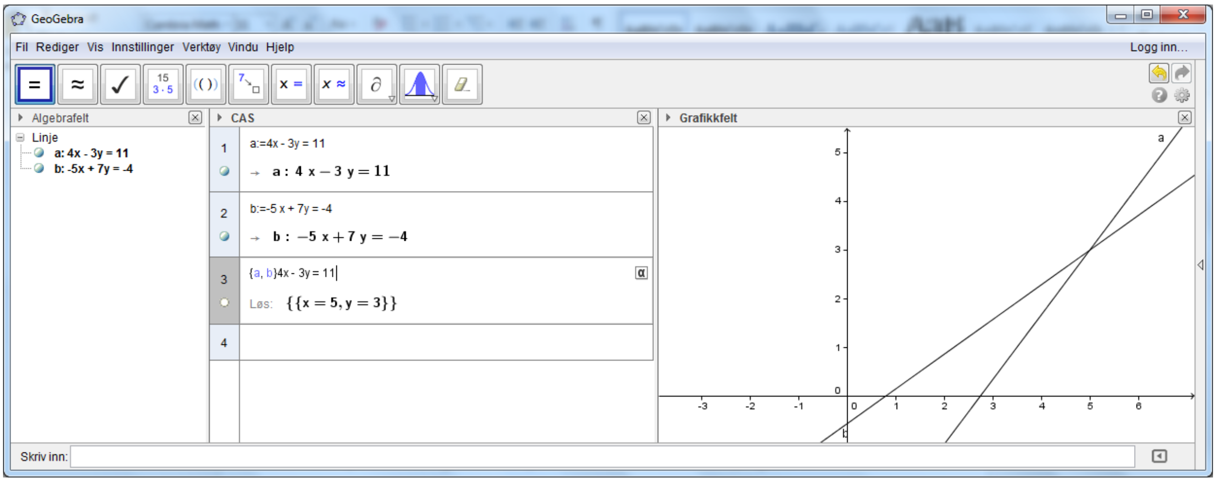


GeoGebra kan også løse systemer av likninger. Vi skal se på følgende eksempel:

$4x - 3y = 11$

$-5x + 7y = -4$

Start først med å blanke ut det vi gjorde i sted. Deretter skriver du inn den første likningen i linje 1 og den andre i linje 2. Deretter skal du merke begge to. Du må holde Ctrl-tasten nede samtidig som du merker linje 1 og linje 2. Trykk deretter på x =-knappen. Da får du løst likningssystemet.



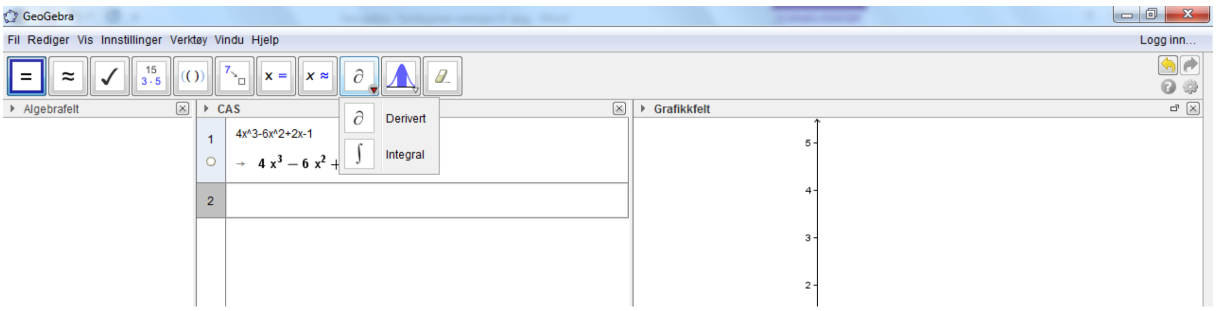
Her ser vi at likningssystemet er løst, og at grafene i tillegg er tegnet opp i Grafikkfeltet til høyre. Det er selvsagt ikke noe i veien for å løse mer kompliserte ligningssystemer. GeoGebra takler for eksempel fint tre likninger med tre ukjente. Dette kan du utforske videre på egen hånd.

Derivasjon og integrasjon

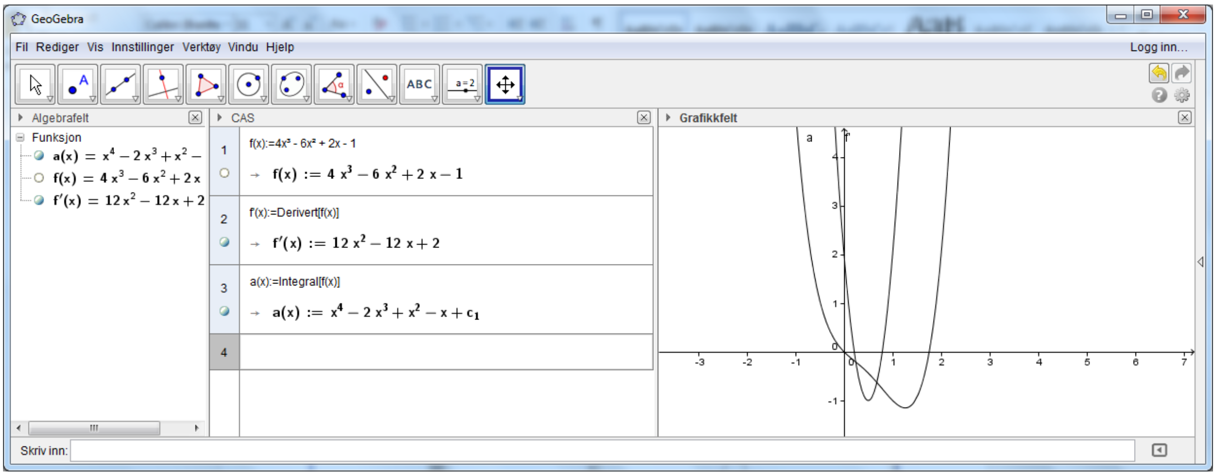
CAS-modulen kan også brukes til å regne ut den deriverte til funksjoner og integraler til funksjoner. La oss se på et eksempel der vi tar for oss funksjonen

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$$

Denne funksjonen ønsker vi både å derivere og integrere. Du starter med å skrive inn funksjonen i den første linja. Deretter merker du linja og trykker på knappen med symbolet ∂.



Der får du opp to alternativer. Knappen med ∂ vil derivere funksjonen, og knappen med $\int$ vil integrere funksjonen. Utfør både derivasjon og integrasjon av denne funksjonen. Du bør da få opp et vindu omtrent som vist på neste side.



Her ser vi at GeoGebra har regnet ut både den deriverte og integralet. I tillegg er grafene til den deriverte funksjonen og grafen til integralet til $f(x)$ tegnet opp i grafikkfeltet.

Hvorvidt det er enklere å bruke CAS-modulen for å regne ut den deriverte og integralet i forhold til det vi gjorde i øvelse 4 og 5, er jeg usikker på. Jeg synes vel egentlig at det er vel så enkelt å bruke framgangsmåten fra øvelse 4 og 5 i forhold til å bruke CAS-modulen.

<u>Differensiallikninger</u>

En kan bruke CAS-modulen i GeoGebra til å løse enkle differensiallikninger av 1. og 2. orden. La oss prøve å løse differensiallikningen

$$y' - y = x$$

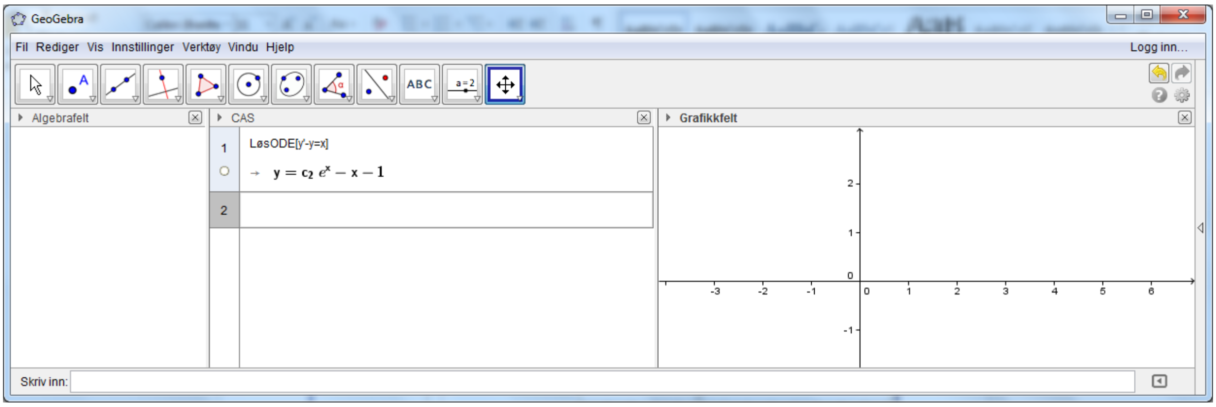
For å løse denne må du bruke kommandoen

LøsODE[<Likning>]

Denne kommandoen skriver du i en av linjene i CAS-feltet. Du erstatter <Likning> med

y’-y=x

GeoGebra løser da differensiallikningen for oss.



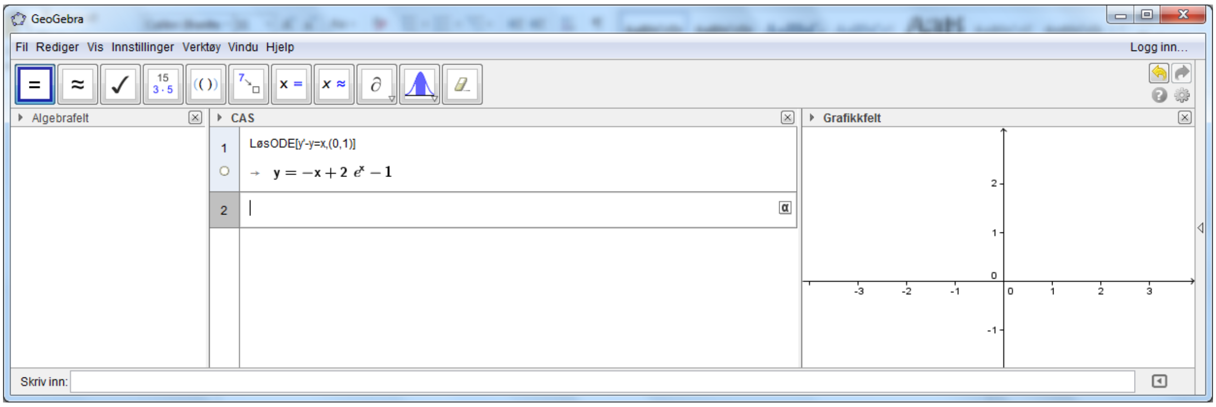
Vi kan også løse likningen med en initialbetingelse. La oss anta at vi har samme likning som i sted, men i tillegg med betingelsen at

$y(0) = 1$

Skal vi løse denne må vi endre litt på kommandoen. Vi bruker som sist løsODE-kommandoen, men vi må fylle den ut som vist under:

LøsODE[y'-y=x,(0,1)]

Vi ser at når vi legger inn denne betingelsen, får vi bestemt konstanten c_1.



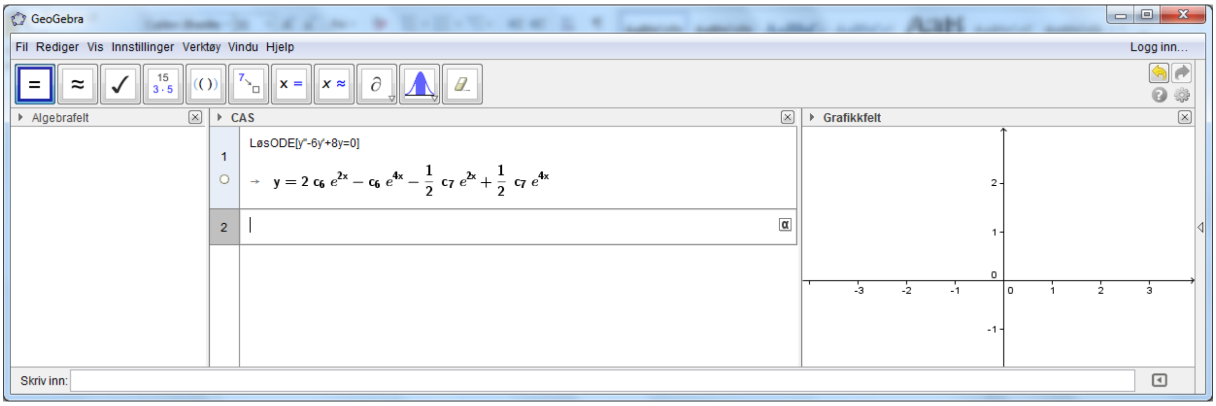
GeoGebra skal også kunne løse enkle differensiallikninger av 2. orden. Vi prøver med likningen

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

Vi bruker samme kommando som før, og setter inn uttrykket

y''-6y'+8y=0

istedenfor <Likning>. På skjermbildet under ser du at GeoGebra har løst likningen.



Det vi legger merke til, er at GeoGebra har skrevet den på en litt uvanlig form, selv om det som står der ikke er feil. En mer vanlig måte å skrive løsningen på er

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$

Uttrykket vårt er det samme som det GeoGebra har fått. Hvis du tar utgangspunkt i GeoGebras svar og setter $2c_6 - \frac{1}{2}c_7 = C_1$ og $\frac{1}{2}c_7 - c_6 = C_2$, ser du at GeoGebras svar og den vanlige måten å skrive svar på er det samme.

Det virker som om GeoGebra stort sett klarer å løse differensiallikninger av 1. og 2. orden med konstante koeffisienter. Den takler også noen likninger der koeffisientene ikke er konstante, men langt ifra alle av denne typen. Enkelte likninger gir den faktisk feil svar på også. Cauchy-Euler-likningen

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$$

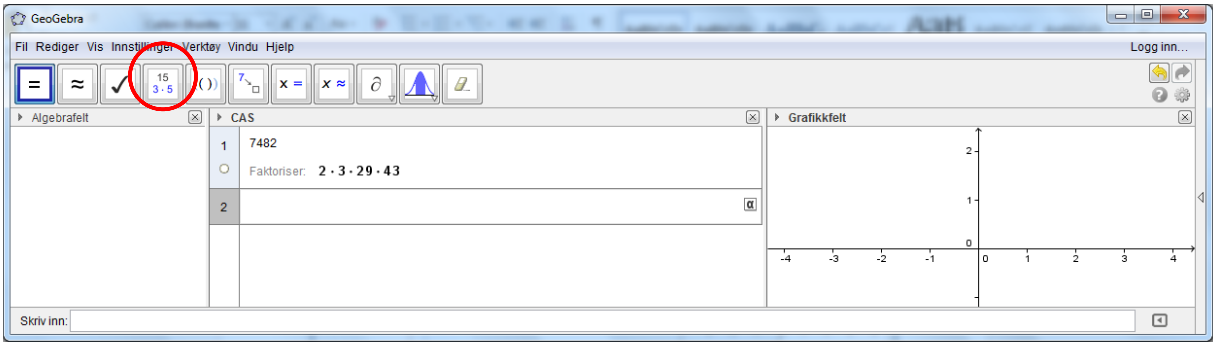
har f.eks. løsningen

$$y = C_1x + C_2x^3$$

men her presenterer GeoGebra et helt vilt svar. Prøv gjerne selv.

Andre muligheter med CAS

Det er imidlertid noen andre funksjoner i CAS som kan være nyttige. En av dem er faktorisering av uttrykk. CAS gir oss mulighet til å primtallsfaktorisere tall. Skriv inn et tall, f.eks. 7482, i den første linja. Klikk deretter på knappen som er vist under. Da vil tallet bli primtallsfaktorisert.



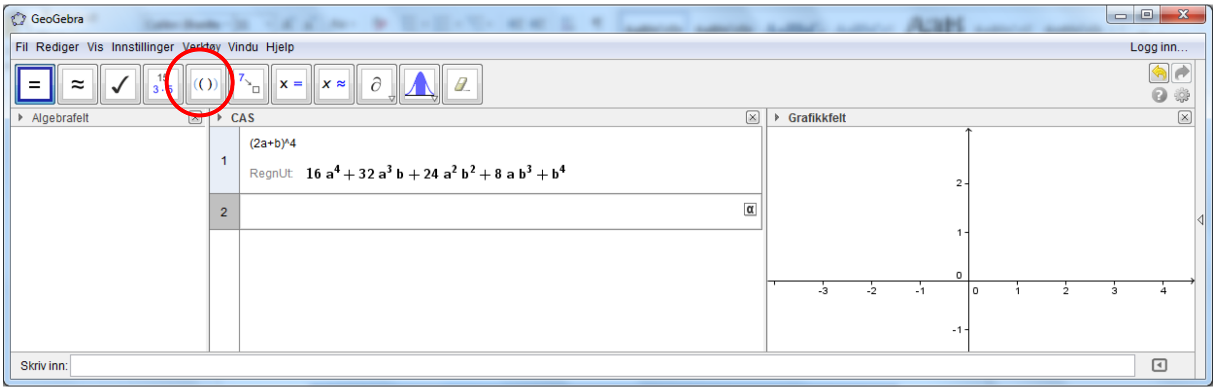
En annen ting en kan gjøre med CAS, er utvide parentesuttrykk. Av og til har en behov for å regne ut uttrykk som for eksempel

$$(2a + b)^4$$

Dette kan være tidkrevende å gjøre for hånd, men CAS-modulen i GeoGebra løser det lett. Etter å blanket ut det forrige du gjorde, skriver du inn uttrykket

(2a+b)^4

i den første linja. Klikk deretter på knappen som er vist under.

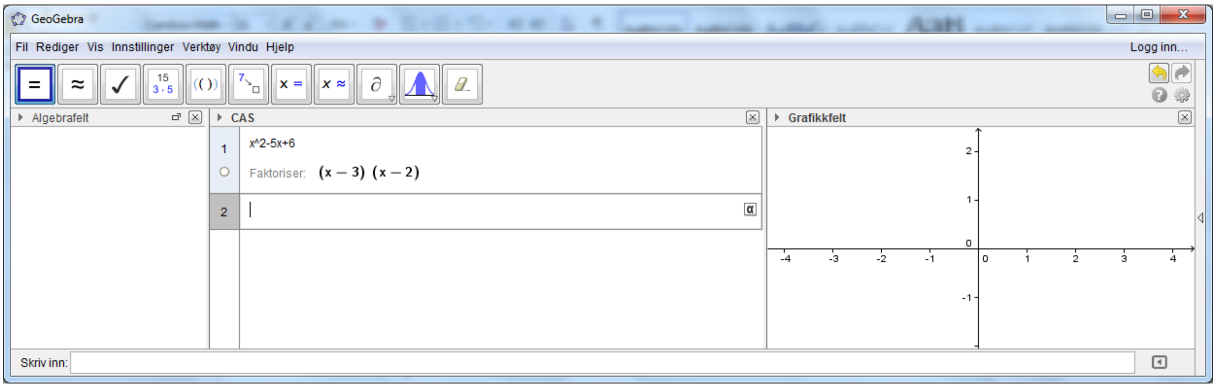


Da blir parentesuttrykket regnet ut.

GeoGebra kan også faktorisere polynomuttrykk som f.eks.

$$x^2 - 5x + 6$$

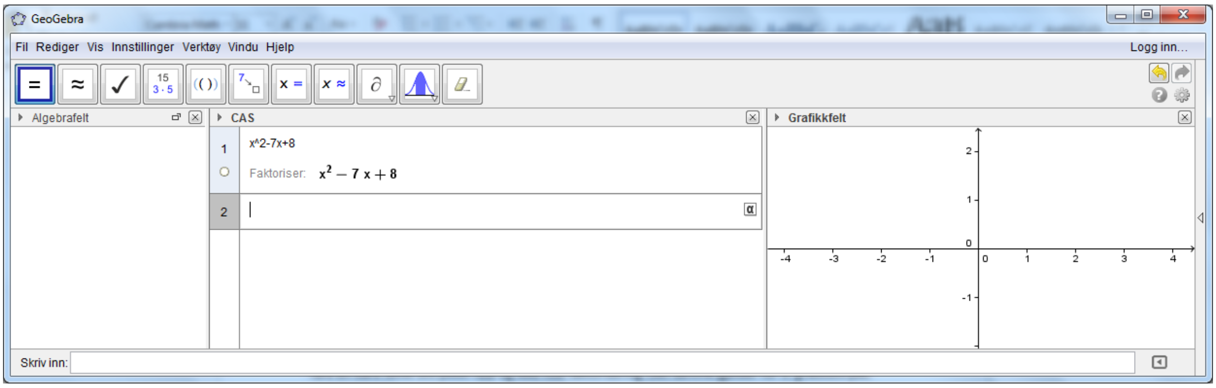
Prøv å skrive inn dette uttrykket, og GeoGebra vil faktorisere uttrykket når du trykker på samme knappen som når du faktoriserte tall.



Det virker imidlertid som om denne funksjonen har en del begrensninger. Så langt som jeg har funnet ut, klarer GeoGebra bare å faktorisere uttrykk med heltallsrøtter og kun opp til tredje grad. Prøver en å faktorisere f.eks.

$$x^2 - 7x + 8$$

får en bare selve uttrykket opp og ikke noen faktorisering. Det samme gjelder for 3. gradsuttrykk.



Det er også mulig å gjøre beregninger innen sannsynlighetsregning i CAS-modulen. Det faller imidlertid utenfor rammene av dette heftet. Interesserte kan utforske dette på egen hånd.